Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern

denen man einen Überblick der Punkte der Kreise gewinnt. In der Figur 9 sind einige Punkte eines solchen im erklärten Sinne reellen, aber in einer imaginären Ebene liegenden Kreises angedeutet. (Die Grössenverhältnisse sind der Übersicht wegen andere als in der Figur 8). Interessant ist der Übergang eines solchen Kreises in einen reellen Kreis in einer reellen Ebene.

Damit haben wir uns einen anschaulichen Einblick in die Konfiguration der zwölf Nabelpunkte verschafft. Die Betrachtungen lassen sich auf beliebige Flächen zweiter Ordnung ausdehnen. Unsere Ausführungen haben natürlich nur für denjenigen einen Wert, der ausser der Eleganz analytischer Entwicklungen auch die anschauliche Verarbeitung zu schätzen weiss.

L. LOCHER-ERNST.

Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern[1])

Wird ein Gegenstand aus zwei Augen O und O_1 auf eine Bildebene π projiziert, so stehen beide Bilder in einer einfachen Beziehung. Diese Beziehung ermöglicht a) aus einem axonometrischen Bild durch «Umzeichnen» ein perspektives Bild herzustellen, b) aus einem Foto das dargestellte Objekt durch Umzeichnen in ein axonometrisches Bild zu rekonstruieren, c) ein ungünstig wirkendes perspektives Bild in ein anderes umzuzeichnen, indem das Auge O durch ein anderes Auge O_1 ersetzt wird.

Eine waagrechte Grundebene Γ schneide π in der Grundlinie g. Ein Raumpunkt P habe den Grundriss P' in Γ. Die Sehstrahlen OP und O_1P schneiden π in P^c und P^z, die Sehstrahlen OP' und O_1P' schneiden π in P'^c und P'^z. Wir unterscheiden, ob π lotrecht steht oder nicht.

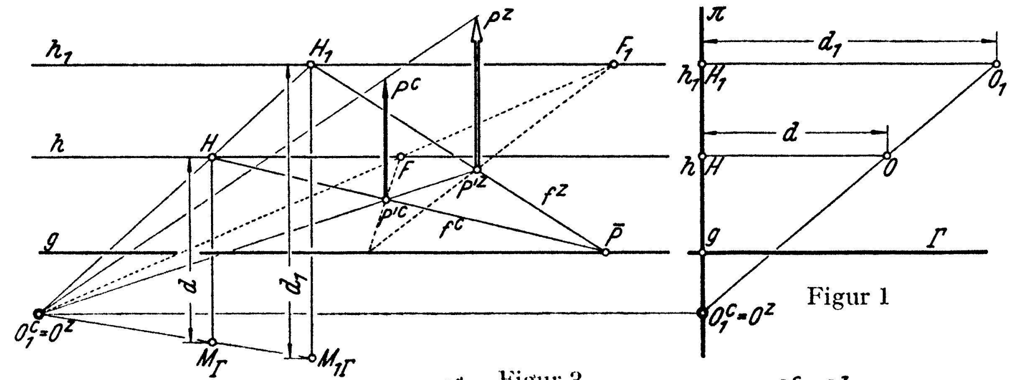
1. *Umzeichnen bei lotrechter Bildebene*

Figur 1 zeigt links die perspektiven Bilder mit den Hauptpunkten H, H_1, den Horizonten h, h_1 und den Messpunkten $M_\Gamma, M_{1\Gamma}$ von Γ (= «umgeklappte Augen»), rechts eine Ansicht in Richtung g, die man als Kreuzriss auffassen kann. Der Schnittpunkt $O_1^c = O^z$ der Geraden OO_1 mit π heisse Kernpunkt. Jede Gerade in π durch $O_1^c O^z$ heisse ein Kernstrahl. Die Ebene POO_1 enthält P^c und P^z. Sie schneidet π nach einem Kernstrahl, daher liegen P^c und P^z auf einem Kernstrahl. Ebenso liegen P'^c und P'^z auf einem Kernstrahl (ausgeschnitten von der Ebene $P'OO_1$). – Ist P der Fernpunkt der zu π normalen Geraden oder der Fernpunkt der Drehsehnen OM_Γ und $O_1M_{1\Gamma}$, so folgt: H und H_1 liegen auf einem Kernstrahl, ebenso M_Γ und $M_{1\Gamma}$. Sind H, H_1, d, d_1 und g gegeben, so geht h parallel zu g durch H und h_1 durch H_1. Den Kernpunkt findet man ohne Kreuzriss als Schnittpunkt von HH_1 mit $M_\Gamma M_{1\Gamma}$.

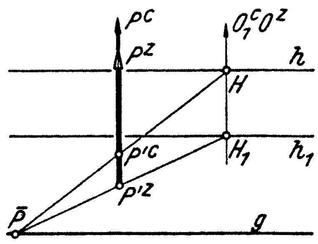
P sei durch P^c und P'^c gegeben. Um P^z und P'^z ohne Benutzung des Kreuzrisses zu erhalten, lege man in Γ durch P' die zu g normale «Fallgerade» f. f^c geht durch H und P'^c, f^z durch H_1 und den auf g gelegenen Bildspurpunkt $\overline{P}$ von f. Der Kernstrahl

[1]) Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).

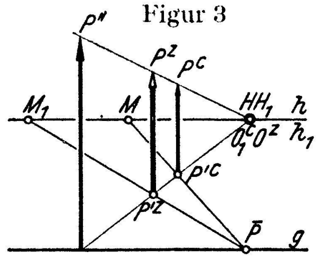
durch P'^c schneidet f^z in P'^z. P^z ist der Schnittpunkt des Kernstrahls durch P^c mit der zu g normalen Geraden durch P'^z. Treten schleifende Schnitte auf, so kann man statt f auch eine Gerade anderer Richtung in Γ verwenden (gestrichelt in Figur 1, die Fluchtpunkte F und F_1 der gewählten Richtung liegen auf einem Kernstrahl). Der perspektive Grundriss erfährt eine perspektive Kollineation $P'^c \rightarrow P'^z$. g ist die Achse, $O_1^cO^z$ das Zentrum, H und H_1 ein Punktepaar dieser Kollineation. Auch die



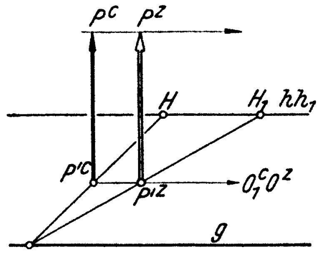
Figur 1



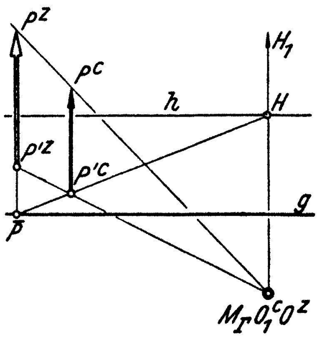
Figur 2



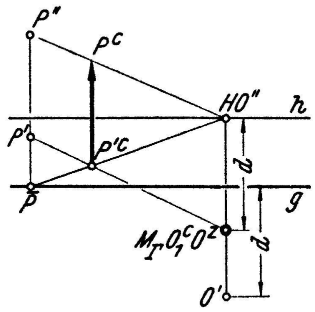
Figur 3



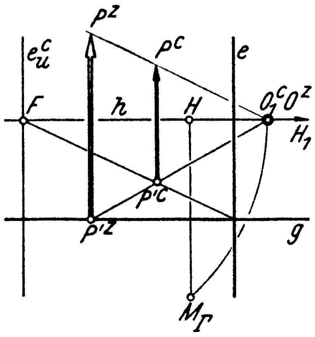
Figur 4



Figur 5



Figur 6



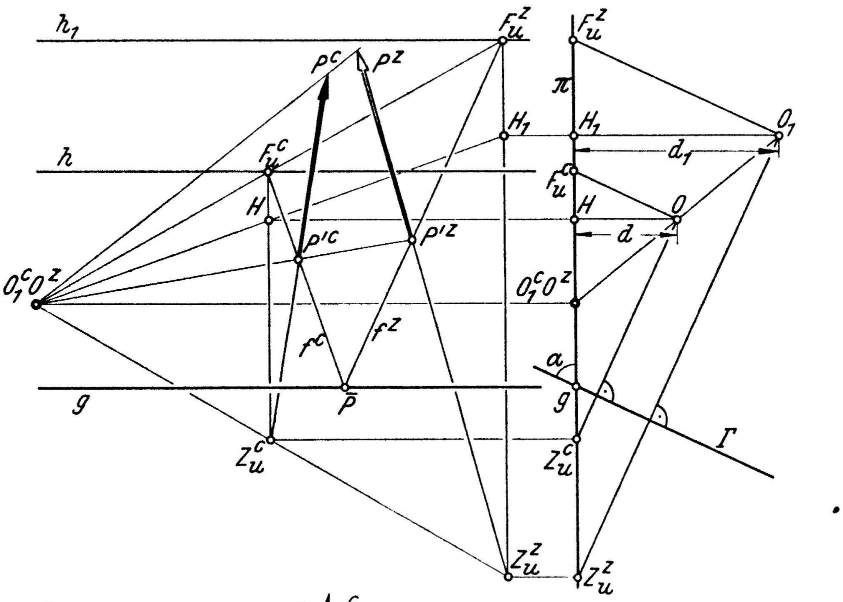
Figur 7

Bilder P^c und P^z der Punkte P einer beliebigen Ebene ε, die weder O noch O_1 enthält, stehen in perspektiver Kollineation (Zentrum = Kernpunkt, Achse = Bildspur von ε). Ist ε die Fernebene, so ist diese Kollineation die Streckung aus $O_1^cO^z$, die H in H_1 überführt. Einige Sonderfälle:

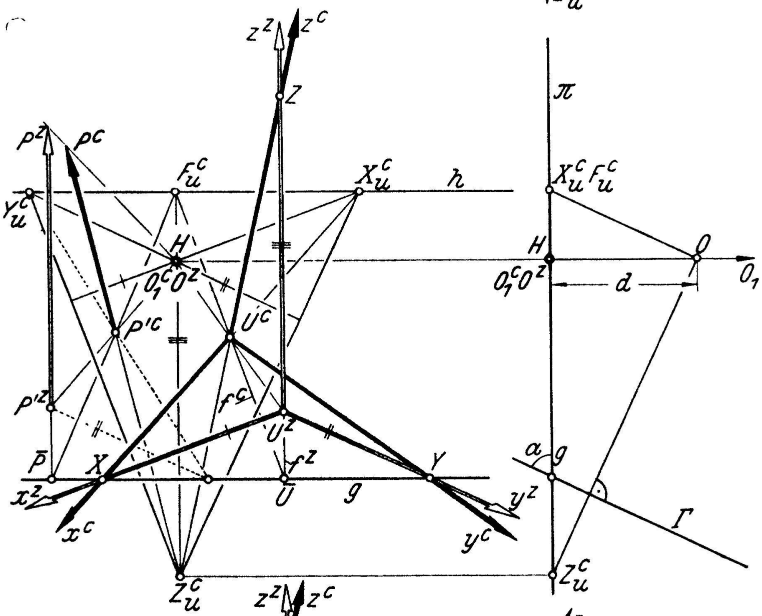
a) Änderung der Augenhöhe (Figur 2). Aus P'^c folgt P'^z wie in Figur 1. P^z folgt aus $P'^zP^z = P'^cP^c$.

b) Änderung der Distanz (Figur 3). $H = H_1$ ist Kernpunkt. Die Konstruktion benützt die Messpunkte M und M_1 ($HM = d$, $H_1M_1 = d_1$). Ausserdem wurde der Aufriss P'' von P auf π konstruiert.

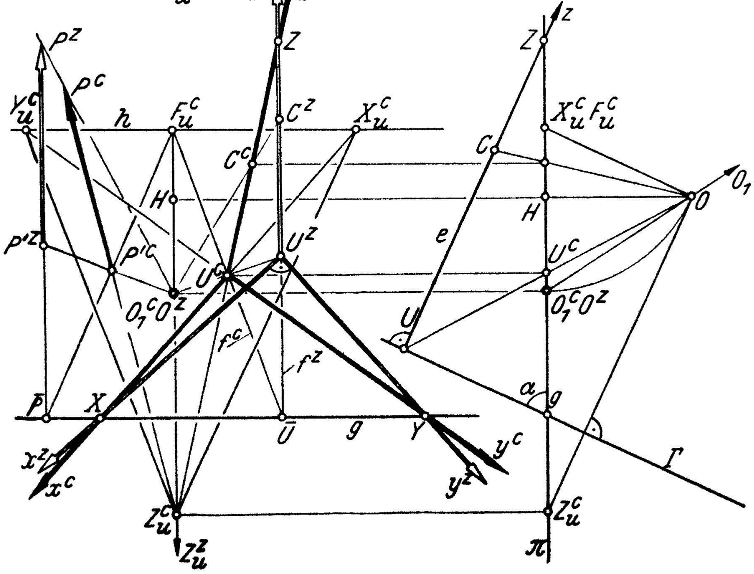
c) Stereoskopbilder, Anaglyphen usw. sind Paare von perspektiven Bildern, deren Augen O, O_1 in gleicher Höhe über Γ und in gleicher Distanz vor π liegen (Figur 4). Kernpunkt ist der Fernpunkt von $h = h_1$.



Figur 8



Figur 9



Figur 10

d) Herstellung eines perspektiven Bildes aus einer Militärperspektive (Figur 5). O_1 sei der Fernpunkt der Drehsehnen, die bei der Drehung von O um h nach M_Γ und zugleich bei der Drehung von Γ um g nach π auftreten. Hier ist der perspektive Grundriss (P'^z) mit dem gewöhnlichen Grundriss gleichsinnig kongruent, und die Höhen $P'^z P^z$ erscheinen in wahrer Grösse. Daher ist das perspektive Bild (P^z) eine Militärperspektive. Umgekehrt kann man nach Figur 5 zuerst die Militärperspektive zeichnen und daraus das perspektive Bild konstruieren. Die Konstruktion braucht hier und in anderen Fällen nur für eine geringe Anzahl von Punkten durchgeführt zu werden, denn wenn von einer Geraden bereits zwei Punkte umgezeichnet sind, genügt für die übrigen Punkte der Geraden das Ziehen von Kernstrahlen.

e) Herstellung eines perspektiven Bildes aus Grund- und Aufriss oder umgekehrt (Figur 6). Nach b) und d) kann man von P^c und P'^c zum gewöhnlichen Grundriss P' auf Γ und zum Aufriss P'' auf π übergehen. Umgekehrt ergibt sich so aus Grund- und Aufriss das perspektive Bild.

f) Freie Perspektive (Figur 7). Nimmt man auf h einen Fluchtpunkt $O_1^c O^z$ an, so kann man in der dadurch bestimmten waagrechten Richtung eine Höhe $P'P$ in die Bildebene «herausschieben» und erhält aus P'^c und P^c die Höhe $P'P = P'^z P^z$. – Ist ε eine lotrechte Ebene (Fluchtspur $e_u^c \perp h$, $F = (e_u^c\, h)$ = Fluchtpunkt der waagrechten Geraden in ε und $\parallel \varepsilon$), so kann man O_1 als Fernpunkt der Drehsehnen wählen, die ε in π überführen. $O_1^c O^z$ auf h ist dann der Messpunkt von ε. H_1 ist Fernpunkt von g, daher ist $f^z = g$. f^c und $\overline{P}$ sind hier überflüssig.

2. *Umzeichnen bei geneigter Bildebene*

In Figur 8 seien die perspektiven Bilder durch die Hauptpunkte H, H_1, die Distanzen d, d_1, die Grundlinie g und die Neigung α von π gegen Γ bestimmt. Rechts wurden im Kreuzriss die Horizonte h, h_1, die Fluchtpunkte F_u^c, F_u^z der Fallgeraden, die Fluchtpunkte Z_u^c, Z_u^z der Lotrechten und der Kernpunkt $O_1^c = O^z$ konstruiert. Die Ebenen OO_1P und OO_1P' schneiden π in Kernstrahlen. Daher liegen P^c und P^z auf einem Kernstrahl, ebenso P'^c und P'^z. Auch $F_u^c F_u^z$, $Z_u^c Z_u^z$ und HH_1 sind Kernstrahlen.

P sei durch P^c und P'^c gegeben, wobei $P'^c P^c$ durch Z_u^c geht. Um P^z und P'^z ohne Benutzung des Kreuzrisses zu ermitteln, lege man in Γ durch P' die zu g normale Fallgerade f. $f^c = F_u^c P'^c$ schneidet g in $\overline{P}$, f^z geht durch F_u^z und $\overline{P}$. Der Kernstrahl durch P'^c schneidet f^z in P'^z. P^z ist der Schnittpunkt von $P'^z N_u^z$ mit dem Kernstrahl durch P^c. Einige Sonderfälle:

a) Stereoskopbilder, Anaglyphen usw. bei geneigter Bildebene. Hier ist $OO_1 \parallel g$; $O_1^c = O^z$ ist der Fernpunkt von g.

b) Herstellung einer Perspektive aus einem normalaxonometrischen Bild (Figur 9). Ist O_1 der Fernpunkt der zu π normalen Geraden, so ist das Bild aus O_1 der Normalriss auf π. Es ist $O_1^c = O^z = H$. Z_u^z und F_u^z fallen in den Fernpunkt $\perp h$. Um den Normalriss als normalaxonometrisches Bild zu konstruieren, nehme man einen Ursprung U bzw. sein Bild U^c an (in Figur 9 ist U in Γ gewählt), ferner drei Achsenrichtungen bzw. ihre Fluchtpunkte (in Figur 9 sei die eine Achsenrichtung lotrecht, ihr Fluchtpunkt daher Z_u^c; X_u^c kann auf h gewählt werden, Y_u^c ist der Höhenschnittpunkt des

Dreiecks $HX_u^c Z_u^c$). Die Fallgerade f durch U liefert U^z. Die Achsenbilder x^z, y^z und z^z laufen parallel zu den Kernstrahlen durch X_u^c bzw. Y_u^c bzw. Z_u^c. z^z ist normal zu h. Probe: $x^c = U^c X_n^c$ schneidet x^z in einem Punkt X auf g, ebenso liegt $Y = y^c y^z$ auf g. z^c und z^z schneiden sich im Bildspurpunkt Z der z-Achse. U^z ist Höhenschnittpunkt von XYZ. Das Dreieck XYZ ist zum Dreieck $X_u^c Y_u^c Z_u^c$ zentrisch ähnlich. Der Maßstab des normalaxonometrischen Bildes ist durch den Maßstab, in dem d aufgetragen wurde, gegeben. – Sind P^z und P'^z gegeben, so findet man P^c und P'^c in Figur 9 wie früher durch Umzeichnen. Treten schleifende Schnitte auf, so verwende man statt der Fallgeraden durch P' eine andere waagrechte Gerade, zum Beispiel in Figur 9 die y-Parallele.

c) Herstellung einer Perspektive aus einer dimetrischen Militärperspektive (Figur 10). O_1 sei Fernpunkt der Drehsehnen, die zur Drehung von Γ um g nach π gehören. Kernpunkt ist dann der Messpunkt M_Γ von Γ. Das Bild aus O_1 ist eine Militärperspektive mit eigenem z-Maßstab. In Γ liege ein Achsenkreuz Uxy, gegeben durch $U^c X_u^c Y_u^c$, wobei H Höhenschnittpunkt des Dreiecks $X_u^c Y_u^c Z_u^c$ ist. Mittels der Fallgeraden f durch U bestimmen wir U^z. x^z, y^z, z^z gehen durch U^z und sind parallel zu den Kernstrahlen durch X_u^c bzw. Y_u^c bzw. Z_u^c. Probe: $X = x^c x^z$ und $Y = y^c y^z$ liegen auf g. – Nun trage man im Kreuzriss die Einheitsstrecke e auf z von U bis C auf. Der Kreuzrissordner durch den Schnittpunkt von OC mit π schneidet z^c in C^c. Der Kernstrahl durch C^c schneidet z^z in C^z. Aus dem axonometrischen Bild (Einheitsstrecke e auf x^z und y^z, $U^z C^z$ auf z^z) folgt durch Umzeichnen das perspektive Bild (zum Beispiel P in Figur 10). F. HOHENBERG, Graz.

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen zu einer Variationsaufgabe

Das von W. WUNDERLICH kürzlich in dieser Zeitschrift[1]) behandelte und als «verallgemeinerte Schachtelaufgabe» bezeichnete Variationsproblem lässt sich, wenn man den dort betrachteten Körper zu einem geschlossenen Körper ergänzt, bei etwas geänderter Bezeichnung auch so formulieren: Man schneide aus der (y, z)-Ebene eines (x, y, z)-Koordinatensystems vier kongruente Zwickel oder Blätter aus, die im Nullpunkt zusammenhängen, für die die y- bzw. z-Achse Symmetrieachsen sind und deren Längsausdehnung den festen Wert a habe (siehe Figur 1, dort sind nur zwei der vier Blätter gezeichnet). Die Blattkurve C sei so beschaffen, dass sich durch Aufbiegen der Blätter zu Zylinderflächen mit Erzeugenden, die beziehungsweise der y- oder z-Achse parallel sind, ein geschlossener Körper ergibt, der dann offenbar die vier Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $y = \pm z$ zu Symmetrieebenen hat. Symmetrie zur Mittelebene $x = \text{const}$ wird also nicht vorausgesetzt. Gefragt wird nach derjenigen Blattkurve C oder Profilkurve K, die dem Körper das grösstmögliche Volumen erteilt.

Legt man die Kurve C durch die Koordinaten ξ, η (Figur 1) fest, so ist der Zusammenhang zwischen der Kurve K oder $y = y(x)$ und C oder $\eta = \eta(\xi)$ offenbar gegeben durch

$$\eta = y, \qquad d\xi^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1}$$

da ξ zugleich die Bogenlänge von K ist. Je nachdem man C oder K sucht, kommt man

[1]) El. Math. 9, Nr. 4, 89 (1954), Aufgabe 187.