

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

La formule (2) intervient, par exemple, dans le calcul de l'intégrale définie

$$J = \int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t}}.$$

En effet ( $a, b \neq 0$ )

$$J = \frac{|a+b| - |a-b|}{ab} = \frac{2}{\max(|a|, |b|)}.$$

D. S. MITRINOVITCH, Belgrad.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 5.** Das Problem der Quadratur des Kreises im mengengeometrischen Sinn ist immer noch ungelöst! Es handelt sich um die Frage, ob ein abgeschlossener Kreisbereich mit einem flächengleichen abgeschlossenen quadratischen Bereich der Ebene im Sinne der Mengengeometrie zerlegungsgleich ist? Kann man den Kreis so in endlich viele disjunkte Punktfolgen zerlegen, dass sich aus den gleichen in der Ebene passend bewegten Punktfolgen wieder das Quadrat zusammensetzen lässt?

Vermutlich ist dies nicht möglich; doch gibt es in der Mengengeometrie und in der Theorie der Punktfolgenfunktionen bis heute keinen Begriff, der geeignet wäre, zur Klärung dieser Frage herangezogen zu werden.

Die Frage wurde wiederholt von W. SIERPIŃSKI aufgestellt<sup>1)</sup>.

Eine gewisse Merkwürdigkeit liegt darin, dass die Dimension  $k = 2$  vermutlich die einzige Raumdimension ist, für welche die analog verallgemeinerte Frage negativ beantwortet werden muss. Für  $k \neq 2$  ist nämlich eine Kugel stets mit einem inhaltsgleichen Würfel zerlegungsgleich!

Für  $k = 1$  ist die Behauptung trivial und für  $k \geq 3$  eine Folge der bekannten «Zerlegungsparadoxie» von S. BANACH und A. TARSKI<sup>2)</sup>.

Es dürfte wohl leichter sein, zu beweisen, dass Kreis und Quadrat nicht translative zerlegungsgleich sind; in diesem Fall sollen die Teilmengen in der Ebene nur verschoben, aber nicht gedreht werden. Unseres Wissens gibt es auch hier noch keine Handhabe, Fragen dieser Art zu entscheiden.

H. HADWIGER.

## Aufgaben

**Aufgabe 205.** Man zeige: a) Alle Kegelstümpfe, die in der Höhe und in der Länge der erzeugenden «Meridiankurve» (Mantellinie + Radien der begrenzenden Kreise) übereinstimmen, haben dieselbe Gesamtoberfläche. b) Es gibt genau einen nichttrivialen Zylinder der Höhe  $h$  und einen symmetrischen Doppelkegel der Höhe  $h$ , welche in der Gesamtoberfläche und im Flächeninhalt eines Achsenschnittes übereinstimmen.

H. BIERI, Bern.

<sup>1)</sup> Vergleiche: *Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points*, *El. Math.* 5, 1–4 (1950).

<sup>2)</sup> *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, *Fund. Math.* 6, 244–277 (1924).

*Lösung:* a) Es sei  $r$  der Grundkreisradius,  $r' \leq r$  der Deckradius,  $s$  die Mantellinie und  $h$  die Höhe des Kegelstumpfs. Setzen wir  $m = r + s + r'$  und subtrahieren von  $m^2$  die Beziehung  $h^2 = s^2 - (r - r')^2$ , so ergibt sich

$$2[r^2 + r'^2 + s(r + r')] = m^2 - h^2.$$

Die Gesamtoberfläche hat somit den konstanten Wert  $\pi(m^2 - h^2)/2$ .

b) Die Aufgabe hat keine Lösung, falls die Kegelspitze in der Symmetrieebene liegt. Soll der Zylinder mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$  denselben Achsenschnitt haben wie der Doppelkegel mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r'$ , so muss  $2rh = r'h$  oder  $r' = 2r$  gelten. Die Gesamtoberflächen stimmen überein, wenn

$$r^2 + rh = r' \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r'^2} = r \sqrt{h^2 + 16r^2}.$$

Hieraus folgt

$$(r + h)^2 = h^2 + 16r^2,$$

so dass

$$r = \frac{2}{15} h \quad \text{und} \quad r' = \frac{4}{15} h.$$

L. KIEFFER, Luxemburg.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), R. LAUFFER (Graz), E. ROTHMUND (Zürich), J. SCHOPP (Budapest), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 206.** Zwei koaxiale Drehzylinder mit den Radien  $r$  und  $2r$  werden auf beiden Seiten durch je ein Paraboloid zweiter Ordnung begrenzt, dessen Achse parallel zur Zylinderachse ist. Es sei  $V_2$  das Volumen des Zylinders mit dem Radius  $2r$ , und  $M_1$  und  $M_2$  seien die Mantelflächen der Zylinder mit den Radien  $r$  bzw.  $2r$ . Man zeige, dass unabhängig von der Wahl der beiden Paraboloiden gilt:

$$3V_2 = r(4M_1 + M_2).$$

R. LAUFFER, Graz.

*Lösung:* Achse der Zylinder sei die  $z$ -Achse eines normiert-orthogonalen Koordinatensystems.  $x^2 + y^2 = \rho^2$  gibt dann für  $\rho = r$  bzw.  $2r$  die Zylinder. Die Paraboloiden sind durch  $z = a_k x^2 + b_k x y + c_k y^2 + d_k x + e_k y + f_k$  mit  $k = 1$  bzw.  $2$  gegeben, und die Applikatendifferenz ist  $\Delta z = a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f$ , worin  $a = a_2 - a_1$ ,  $b = b_2 - b_1$  usw. bedeutet. Substituiert man  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , so gilt für die Zylindermäntel

$$M_\rho = \int_0^{2\pi} \Delta z \rho d\varphi = \rho \pi (a \rho^2 + c \rho^2 + 2f).$$

Daraus erhält man:

$$M_1 = r \pi (a r^2 + c r^2 + 2f), \quad M_2 = 4 r \pi (2 a r^2 + 2 c r^2 + f)$$

und

$$V_2 = \int_0^{2r} M_\rho d\rho = 4 r^2 \pi (a r^2 + c r^2 + f).$$

Mit diesen drei Werten ist aber die behauptete Beziehung erfüllt.

A. UNTERBERGER, Bludenz.

Eine weitere Lösung sandte A. BAGER (Hjørring), eine Lösung in einem Spezialfall E. ROTHMUND (Zürich).

**Aufgabe 207.** a) Keine Quadratzahl weist in dezimaler Schreibung lauter gleiche Ziffern auf, es wäre denn eine einzige. (Demgegenüber besteht zum Beispiel 121 im Dreiersystem aus lauter Einern.)

b) Es gibt nach Aufgabe 163 Quadratzahlen, die in dezimaler Schreibung mit einer beliebig vorgegebenen Ziffernfolge beginnen, also auch mit lauter gleichen Ziffern. Aber Endungen mit lauter gleichen Ziffern, wie etwa bei 144, gibt es nur sehr wenige. Welche?

A. STOLL, Zürich.

*Lösung:* Wir bestimmen für jedes natürliche  $n \geq 2$  alle Quadratzahlen, die mit  $n$  gleichen Ziffern enden. Es sei zuerst  $n = 2$ . Die Kongruenzen

$$x^2 \equiv 11m \pmod{100} \quad (0 \leq m \leq 9)$$

sind zu lösen. Da  $x^2 \equiv m \pmod{5}$ , werden  $m = 2, 3, 7, 8$  ausgeschlossen. Aus  $m = 5$  würde  $x \equiv 0 \pmod{5}$  und  $55 \equiv 0 \pmod{25}$  folgen, also fällt  $m = 5$  weg.  $m = 6$  ist unmöglich, weil  $x$  gerade ist und  $66 \not\equiv 0 \pmod{4}$ . Für  $m = 1$  und  $m = 9$  ist  $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ , während  $11 \equiv 99 \equiv -1 \pmod{4}$ . Also bleibt nur  $m = 4$  und der triviale Fall  $m = 0$  übrig.

Aus  $x^2 \equiv 44 \pmod{100}$  folgt  $x = 2y$  mit  $y^2 \equiv 11 \equiv 36 \pmod{25}$ , also ist  $y \equiv \pm 6 \pmod{25}$ ,  $x \equiv \pm 12 \pmod{50}$ . Hieraus ergibt sich

$$x^2 = 100(25t^2 + 12t + 1) + 44 \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

Für  $n = 3$  kommt selbstverständlich nur  $m = 4$  in Frage. Aus  $x^2 \equiv 444 \pmod{1000}$  folgt  $x = 2y$ ,  $y^2 \equiv 111 \equiv 361 \pmod{250}$ . Diese Kongruenz spaltet sich auf in das System  $y^2 \equiv 1 \pmod{2}$  und  $y^2 \equiv 361 \pmod{125}$ . Aus  $y \equiv 1 \equiv \pm 19 \pmod{2}$  und  $y \equiv \pm 19 \pmod{125}$  folgt  $y \equiv \pm 19 \pmod{250}$  und  $x \equiv \pm 38 \pmod{500}$ . Somit ist

$$x^2 = 1000(250t^2 + 38t + 1) + 444 \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Im Fall  $n = 4$  folgt aus  $x^2 \equiv 4444 \pmod{10^4}$ , dass  $x = 2y$  und  $y^2 \equiv 1111 \pmod{2500}$ . Das ergibt die oben als unmöglich erkannte Kongruenz  $y^2 \equiv 11 \pmod{100}$ .

Neben (1) und (2) gibt es also nur die trivialen Fälle

$$x = 10^k t \quad (n = 2k), \quad x = 10^{k+1} t \quad (n = 2k + 1), \quad k \geq 1 \quad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

Die Aussage a) folgt aus der obigen Ableitung unmittelbar.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), K. MOSONYI (Szeged, Ungarn), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 208.** Berechne für ein ganzes  $n \geq 1$  und ein ganzes  $p \geq 0$  die Summe

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+p}.$$

E. TROST, Zürich.

*1. Lösung:* Wir bestimmen die Summe  $S$  der Aufgabe für ein beliebiges reelles  $p > -1$ . Man hat

$$S = \frac{1}{n+p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 x^{k/(n+p)} dx = \frac{1}{n+p} \int_0^1 (1-x^{1/(n+p)})^n dx.$$

Mittels der Substitution  $x = t^{n+p}$  lässt sich  $S$  in folgender Weise durch die Beta- bzw. die Gammafunktion ausdrücken:

$$S = \int_0^1 t^{n+p-1} (1-t)^n dt = B(n+p, n+1) = \frac{\Gamma(n+p) \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+p+1)}.$$

Für ganzzahliges  $p \geq 0$  ergibt sich, weil für ein natürliches  $m$   $\Gamma(m) = (m-1)!$ ,

$$S = \frac{n! (n+p-1)!}{(2n+p)!} = \frac{1}{(n+p) \binom{2n+p}{n}}.$$

L. BERNSTEIN, Tel-Aviv, H. L. SCHWARZ, St.Gallen.

2. Lösung: Ist  $f(x)$  vollständig monoton im Intervall  $0 < x < \infty$ , dann ist

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dm(t), \quad 0 < x < \infty$$

wo  $m(t)$  monoton wachsend ist<sup>1)</sup>. Damit haben wir für  $p > -1$

$$\begin{aligned} M_n[p; m(t)] &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(n+p+k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^{\infty} e^{-(n+p+k)t} dm(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(n+p)t} (1-e^{-t})^n dm(t). \end{aligned}$$

Für  $f(x) = 1/x$  ist  $m(t) = t$ , und wir erhalten

$$M_n[p; t] = \int_0^1 y^{n+p-1} (1-y)^n dy = \frac{n! \Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+p+1)}.$$

A. E. LIVINGSTON, Seattle, Wash. (USA.).

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei  $p$  ganz. Betrachten wir den Koeffizienten von  $x^{n-k} x^{k+1} = x^{n+1}$  in der Entwicklung des Quotienten

$$\frac{(1+x)^{2n+p}}{(1+x)^{n+p-1}} = (1+x)^{n+1},$$

so ergibt sich die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+p}{n-k} \binom{n+k+p-1}{k} = 1.$$

Ersetzt man die Binomialkoeffizienten durch Fakultäten, so erhält man sofort den Wert der Summe.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), K. MOSONYI (Szeged), K. RIEDER (Riehen), J. SCHOPP (Budapest), H. WAGNER (Karlsruhe).

**Aufgabe 210.** What are the upper and lower bounds of the series

$$\sum_{k=1}^n \sin k$$

for all integers  $n$ ?

C. R. PERISHO, Lincoln, Nebr. (USA.).

Lösung: Wir betrachten die allgemeinere Summe  $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$ , wo  $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ . Man hat

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=1}^n \{ \sin x \sin kx + \cos x \cos kx + \sin x \sin kx - \cos x \cos kx \} \\ &= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=1}^n \{ \cos(k-1)x - \cos(k+1)x \} \\ &= \frac{1}{2 \sin x} \{ 1 + \cos x - \cos nx - \cos(n+1)x \} = \frac{\cos x/2 - \cos(n+1/2)x}{2 \sin x/2}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Siehe D. V. WIDDER, *The Laplace Transform* (Princeton Univ. Press), S. 161.

Wegen  $-1 \leq \cos(n + 1/2)x \leq 1$  erhält man nach leichter Umformung

$$-\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4} \leq S_n \leq \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{4}.$$

Ist  $x/\pi$  irrational, so ist Gleichheit nicht möglich.  $S_n$  kann aber den angegebenen Schranken beliebig nahe kommen.

R. LAUFFER, Graz.

A. E. LIVINGSTON, Seattle, Wash., USA., und K. RIEDER, Riehen, untersuchen die Annäherung von  $S_n$  an die Schranken genauer mit Hilfe von Sätzen aus der Theorie der Diophantischen Approximationen bzw. mittels der Kettenbruchdarstellung von  $\pi$ .

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), M. G. BEUMER (Enschede, Holland).

### Neue Aufgaben

238. Es ist nicht möglich, einen abgeschlossenen Kreisbereich in zwei kongruente und disjunkte Punktmengen zu zerlegen<sup>1)</sup>. Man kann sich hier fragen, ob die entsprechende Aussage für jede beschränkte zentralsymmetrische Punktmenge, die ihren Mittelpunkt enthält, richtig ist<sup>2)</sup>. Mit andern Worten: Existiert eine zentralsymmetrische beschränkte Punktmenge in der Ebene, die man in zwei kongruente und disjunkte Teilmengen zerlegen kann, obwohl der Mittelpunkt der Punktmenge angehört?

H. HADWIGER, Bern.

239. Es sei  $S_n$  die symmetrische Gruppe von der Ordnung  $n!$  und

$$(S_n)^k = S_n \times S_n \times \cdots \times S_n$$

das direkte Produkt von  $k$  Exemplaren der  $S_n$ . Es ist zu zeigen, dass die Gruppe  $(S_n)^k$  von  $k$  Elementen erzeugt wird ( $k \geq 2$ ).

FRANZ WEVER, Mainz.

240. Jedes Linienelement  $(T, t)$  einer Hyperbel  $h$  bestimmt mit den beiden Asymptoten eine Parabel  $p$ . Lässt man  $T$  auf  $h$  wandern, so entsteht eine einparametrische Parabelschar. Der Brennpunkteort dieser Parabeln ist zu suchen.

R. BEREIS, Wien.

241. Man beweise mit rein-algebraischen Mitteln

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{4n+1} = 2n(4n+1),$$

$$\text{b) } \prod_{k=1}^{2n} \cos \frac{k\pi}{4n+1} = 4^{-n}.$$

M. G. BEUMER, Enschede (Holland).

242. Ein Rotationshyperboloid sei gegeben durch den Radius  $R$  des Kehlkreises  $K$  und den Radius  $\varrho$  des Scheitelkrümmungskreises der erzeugenden Hyperbel. Das Hyperboloid wird von einem geraden Kreiszyylinder mit dem Radius  $r \leq \varrho$ , dessen Achse in der Ebene von  $K$  liegt, berührt. Man bestimme den Winkel, um den der Zylinder um die Normale des Berührungspunktes (nach einer Seite) gedreht werden kann, ohne sich von  $K$  abzuheben.

E. TROST, Zürich.

<sup>1)</sup> Vergleiche Aufgabe Nr. 51 von B. L. VAN DER WAERDEN [El. Math. 4, 18 (1949)] und Lösungen von W. GYSIN, D. PUPPE u. a. [El. Math. 4, 140 (1949)].

<sup>2)</sup> Die Frage der Kreiszerlegung wird auch in der Antrittsvorlesung von J. DE GROOT, *Phantasie von Punkt zu Punkt* [Euclides, Groningen, 24, 243–253 (1949)], erörtert. J. C. H. GERRETSEN schrieb hierzu [Zbl. Math. 34, 104 (1950)]: «Das verwandte Problem für irgendeine Scheibe mit Mittelpunkt scheint ausserordentlich schwierig zu sein und ist bis jetzt noch nicht gelöst worden».