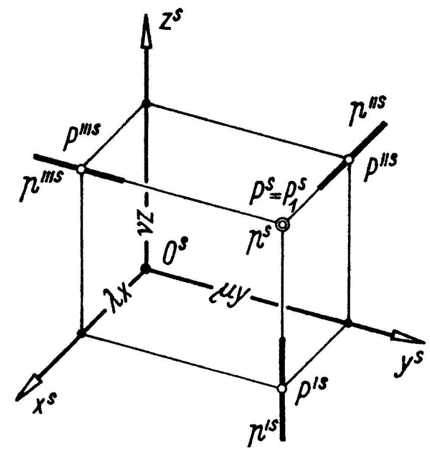
Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 4

Artikel: Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie
Autor: Wunderlich, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18080

Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie

Der neue hübsche Beweis des Pohlkeschen Lehrsatzes, den mein Freund HOHENBERG vor kurzem an dieser Stelle mitgeteilt hat[1]), gab den unmittelbaren Anstoss zum vorliegenden Bekenntnis einer schon lange gehegten ketzerischen Meinung über Wert und Bedeutung dieses Satzes im Rahmen des Unterrichts. Das Theorem von POHLKE, das bereits auf ein Alter von hundert Jahren zurückblickt[2]), besagt bekanntlich, dass jedes axonometrische Bild eines Gegenstandes (im besonderen eines Würfels) zu einer bestimmten Parallelprojektion des Gegenstandes *ähnlich* ist. Der Beweis des Satzes erfordert stets ziemliche Umstände, und dies ist wohl die treibende Ursache für die unzähligen Beweisvarianten gewesen, die im Laufe der Zeit entstanden sind[3]). Häufig wird man aber aus Zeitmangel gezwungen sein, im Unterricht auf den Beweis ganz zu verzichten – und dies ohne sichtlichen Schaden!



Und woran liegt das nun eigentlich? Im Grunde genommen doch daran, dass man bei der Herstellung eines axonometrischen Bildes die Projektionsrichtung und die Raumlage des Achsenkreuzes tatsächlich nicht zu kennen braucht: Der Satz von POHLKE soll in der Hauptsache nur verbürgen, dass man auch bei frei gewählten Achsenbildern und Verkürzungsverhältnissen die *Gesetze der Parallelprojektion* anwenden darf, also vor allem die Erhaltung des Parallelismus und der Teilverhältnisse, die Regeln der Kreisdarstellung usw. Bei kritischer Prüfung der Sachlage wird man jedoch zugeben müssen, dass hierfür auch schon die Erkenntnis genügen würde, dass jedes axonometrische Bild zu einer Parallelprojektion *affin* ist. Der Nachweis für diese schwächere, aber zur Begründung der Axonometrie vollkommen ausreichende Aussage ist natürlich viel leichter zu erbringen.

Erklärt man den axonometrischen Abbildungsvorgang rein planimetrisch durch das Auftragen der kartesischen Koordinaten x, y, z jedes Dingpunktes P mit bestimmten Verkürzungen λ, μ, ν in drei freigewählten Richtungen x^s, y^s, z^s der Zeichenebene (Figur), so folgt zunächst bei Veränderung einer einzigen Koordinate, dass sich die zu den Koordinatenachsen parallelen Raumgeraden auf die zu den Achsenbildern parallelen Geraden abbilden. Ferner ist klar, dass jede in einer Koordinatenebene liegende Figur und ihr Bild zueinander affin sind. – Fragt man dann nach dem Ort aller Raumpunkte P, die denselben Bildpunkt P^s besitzen, so entnimmt man direkt aus dem Bild und auf Grund der vorausgeschickten Hilfssätze, dass ihre Normalprojektionen

---

1) F. HOHENBERG, *Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke*, El. Math. *10*, 40–42 (1955).

2) Nach einer Bemerkung von H. A. SCHWARZ, J. Math. *63*, 309–314 (1864), der den ersten vollständigen Beweis gab, hat K. POHLKE seinen Satz 1853 gefunden; veröffentlicht hat er ihn, allerdings ohne Beweis, erst 1860 in seinem Lehrbuch der Darstellenden Geometrie.

3) Vgl. E. WENDLING, *Der Fundamentalsatz der Axonometrie* (Zürich 1912), ferner TH. SCHMID, *Darstellende Geometrie*, Bd. 2, 2. Aufl. (Sammlung Schubert 66, Berlin und Leipzig 1923), S. 59–60.

P', P'', P''' auf die drei Koordinatenebenen drei Gerade p', p'', p''' erfüllen, die im Bild parallel zu z^s, x^s, y^s erscheinen. Der Ort der Punkte P ist mithin eine Raumgerade p von ganz bestimmter Richtung. Denkt man sich nun den abzubildenden Gegenstand G zunächst in der Richtung p auf die $(y\,z)$-Ebene projiziert, so entsteht hier ein *Schrägriss* G_1, dessen axonometrisches Bild G_1^s sich mit dem Bild G^s des Gegenstandes deckt. Da zwischen G_1 und G_1^s Affinität besteht, so ist damit bewiesen, dass das *axonometrische Bild G^s des Gegenstandes zu seinem Schrägriss G_1 affin* ist.

Damit ist ein hinreichender Einblick in das Wesen des axonometrischen Bildes gewonnen, der die Gesetze der Parallelprojektion, soweit sie affiner Natur sind – und nur auf diese kommt es tatsächlich an – anzuwenden gestattet. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint es kaum begreiflich, dass dem (an sich natürlich interessanten) Pohlkeschen Lehrsatz, der ja einen ausgesprochen metrischen Inhalt hat, bislang eine so fundamentale Bedeutung für die Axonometrie beigemessen wurde. Eine bewusste Abkehr von dieser Tradition ist anscheinend erstmalig in dem ausgezeichneten Werk von E. STIEFEL vollzogen worden, das im wesentlichen ebenfalls die hier dargelegte Auffassung vertritt[1]). Im übrigen steht auch F. HOHENBERG im Grunde genommen auf dem gleichen Standpunkt, wie schon die Einleitung seines Aufsatzes andeutet; einer persönlichen Mitteilung zufolge legt sein im Druck befindliches Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* bei der Behandlung der schiefen Axonometrie zunächst besonderes Gewicht auf die affinen Eigenschaften der Abbildung und bringt den Pohlke-Satz erst als abschliessende Ergänzung. W. WUNDERLICH, Wien.

Ungelöste Probleme

Nr. 6. P. ERDÖS schilderte kürzlich (Besuch in der Schweiz im November 1954) verschiedene Fragen der kombinatorischen Geometrie, beispielsweise die folgende: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl $N_k(n)$ $(n \geqq 2;\ k \geqq 1)$, so dass die Aussage richtig ist: «Der Durchmesser einer aus n Punkten bestehenden Menge A des k-dimensionalen euklidischen Raumes wird höchstens durch $N_k(n)$ verschiedene Punktepaare von A realisiert.» Wie gross ist $N_k(n)$?

Unter dem Durchmesser einer beschränkten Punktmenge versteht man bekanntlich die obere Schranke der Distanzen, welche durch Punktepaare der Menge repräsentiert werden. Ist die Punktmenge endlich, so gibt es wenigstens ein Punktepaar, das den Durchmesser der Menge realisiert.

Trivialerweise gilt $N_1(n) = 1$; weiter ist $N_2(n) = n$[2]). Nach einer von VÁZSONYI stammenden Vermutung ist $N_3(n) = 2\,n - 2$[3]).

Vermutlich gilt $N_k(n) < n\,(k+1)/2$; hieraus würde sich die Richtigkeit einer Vermutung von K. BORSUK (vgl. Problem Nr. 2) für endliche Punktmengen ergeben. Mit einfachem Schubfachschluss würde sich aus der angegebenen Schätzung folgern lassen, dass sich A in $k+1$ Teilmengen so zerlegen lässt, dass der Durchmesser von A in keiner Teilmenge angenommen wird. H. HADWIGER.

---

1) E. STIEFEL, *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947), insbesondere S. 133.
2) Vgl. Jahresbericht D. M. V. *43*, 114 (1934).
3) P. ERDÖS, *On Sets of Distances of n Points*, Amer. Math. Monthly *53*, 248–250 (1946).