

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 5: Zum 60.Geburtstag von Rolf Nevanlinna

**Artikel:** Elementargeometrischer Nachweis des "gefährlichen" Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt  
**Autor:** Krames, Josef  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18083>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

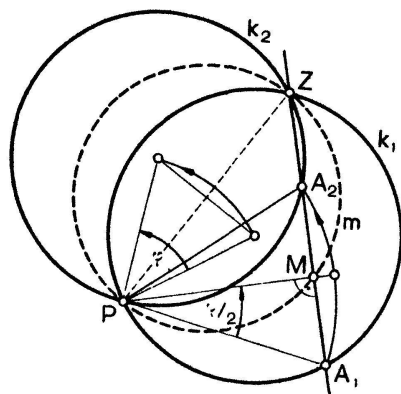
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Elementargeometrischer Nachweis des «gefährlichen» Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt

1. Die Aufgabe, durch ein gegebenes Dreieck  $ABC$  ein Dreikant  $abc$  von gegebener Gestalt zu legen (räumlicher Rückwärtseinschnitt) hat bekanntlich vier Lösungen (sofern je zwei zur Ebene von  $ABC$  symmetrische Dreikante nur einfach gezählt werden). Zwei der wesentlich verschiedenen Lösungen können auch zusammenfallen,



Figur 1

nämlich, wie S. FINSTERWALDER<sup>1)</sup> als erster gezeigt hat, genau dann, wenn der Dreikantscheitel  $S$  auf dem «gefährlichen Zylinder» liegt, der den  $ABC$  umschriebenen Kreis zum Normalschnitt hat. Einen anderen, methodisch verbesserten Beweis dieser Tatsache lieferte W. WUNDERLICH in einer vom Verfasser angeregten Arbeit<sup>2)</sup>. Während FINSTERWALDER noch mit unendlich kleinen Größen verschiedener Ordnung operiert, verwendet WUNDERLICH die Eigenschaften des Nullsystems, das mit einer zwangsläufigen Raumbewegung in jedem Augenblick verbunden ist. Es fehlte aber noch ein bloss auf elementare Hilfsmittel gestützter Nachweis. Diese Lücke soll hier geschlossen werden, wobei

vor allem einfache Beziehungen zwischen perspektiv liegenden kongruenten Dreiecken zur Anwendung kommen.

2. Wir betrachten zuerst einen Kreis  $k_1$  und verdrehen ihn um einen seiner Umfangspunkte  $P$  durch einen beliebigen Winkel  $\varphi$  in die Lage  $k_2$  (Figur 1). Darnach geht die Drehsehne jedes Umfangspunktes  $A_1$  von  $k_1$ , das heisst die Verbindungsgerade dieses Punktes mit seiner Endlage  $A_2$ , durch den zweiten Schnittpunkt  $Z$  von  $k_1$  und  $k_2$ . Diesbezüglich sei bloss auf den Kreis  $m$  verwiesen, auf dem die Mitten  $M$  aller Strecken  $A_1A_2$  liegen (siehe Figur 1).

Liegt jedoch der Drehpol  $P$  weder auf dem Umfang von  $k_1$  noch im Unendlichen und wird auch von der Annahme  $\varphi = \pm\pi$  abgesehen, dann umhüllen die Drehsehnen  $A_1A_2$  eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse, nämlich jene, die  $P$  zum Brennpunkt und  $m$  zum Scheitelkreis hat. Es gibt daher in diesem Falle nie mehr als zwei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von  $k_1$  und  $k_2$ , die durch einen Punkt  $Z$  gehen. Nun bilden insbesondere drei Paare entsprechender Punkte von  $k_1$  und  $k_2$  zwei gleichsinnig kongruente Dreiecke, und solche können (samt ihren Umkreisen) durch eine Verdrehung innerhalb ihrer Ebene zur Deckung gebracht werden. Daraus ergibt sich folgender

*Hilfssatz*<sup>3)</sup>. Zwei (in derselben Ebene befindliche) gleichsinnig kongruente Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$ , deren Seiten nicht paarweise parallel sind (Figur 2), liegen dann

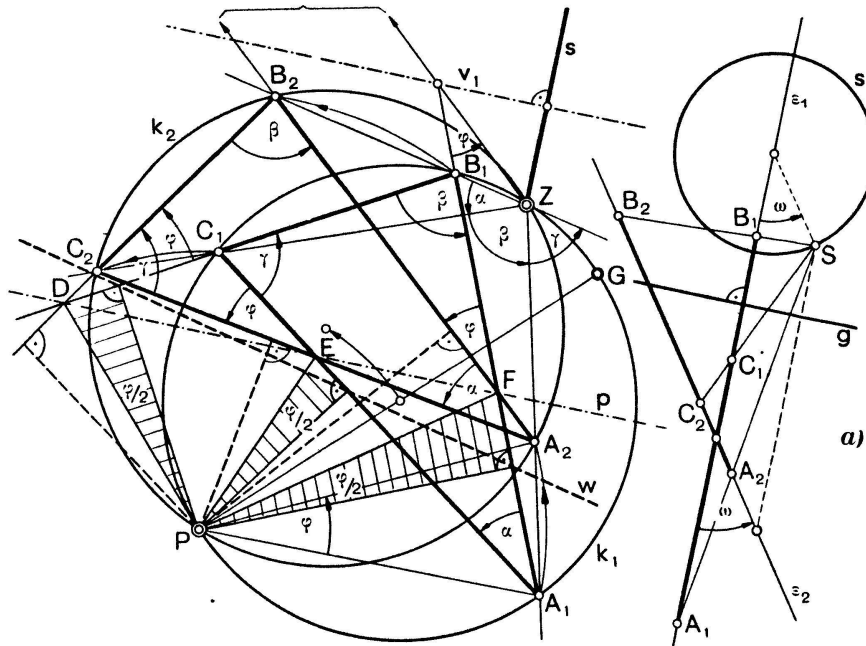
<sup>1)</sup> S. FINSTERWALDER, *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie*, Jber. dtsch. Math. Ver. 6 1–44 (1899).

<sup>2)</sup> W. WUNDERLICH, *Über den «gefährlichen» Rückwärtseinschnitt*, Jber. dtsch. Math. Ver. 53, 41–48 (1943).

<sup>3)</sup> Wie unschwer nachzuweisen ist, gilt dieser Satz auch für gleichsinnig ähnliche Dreiecke, wobei der Drehpol  $P$  durch das Zentrum der Drehstreckung zu ersetzen ist, die  $A_1B_1C_1$  in  $A_2B_2C_2$  überführt. Wir kommen hierauf in einem anderen Zusammenhang noch zurück.

und nur dann perspektiv, wenn sie durch eine Verdrehung um einen Schnittpunkt  $P$  ihrer Umkreise  $k_1$  und  $k_2$  ineinander übergehen. Das Perspektivitätszentrum deckt sich dabei mit dem zweiten Schnittpunkt  $Z$  von  $k_1$  und  $k_2$ , ferner sind die Winkel zwischen den Perspektivitätsstrahlen  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  in dieser zyklischen Reihenfolge gleich den bei den Ecken  $C_1$  (oder  $C_2$ ),  $A_1(A_2)$  bzw.  $B_1(B_2)$  auftretenden Dreieckswinkeln  $\gamma, \alpha, \beta$  (siehe Figur 2).

3. Wir bezeichnen nunmehr mit  $P$  und  $\varphi$  den Pol und den Winkel der Verdrehung, die irgendein Dreieck  $A_1B_1C_1$  innerhalb seiner Ebene in ein gleichsinnig kongruentes



Figur 2

Dreieck  $A_2B_2C_2$  überführt. Je zwei entsprechende Dreiecksseiten sind sodann von  $P$  gleich weit entfernt und gegeneinander unter dem Winkel  $\varphi$  geneigt (vgl. Figur 2). Die Schnittpunkte  $D, E, F$  zugeordneter Dreiecksseiten werden daher auch erhalten, wenn man aus  $P$  auf die Seiten von  $A_1B_1C_1$  die Lote fällt, diese um  $P$  durch den Winkel  $\varphi/2$  verdreht und hierauf mit den betreffenden Dreiecksseiten zum Schnitt bringt. Diese drei Punkte  $D, E, F$  liegen aber (nach DESARGUES) auf einer Geraden  $p$ , sobald die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  durch ein Zentrum  $Z$  gehen. Nach obigem folgt hieraus zunächst, wenn man bloss auf das erstgenannte Dreieck achtet, der schon PONCELET bekannte<sup>1)</sup>

*Satz.* Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  mit seinem Umkreis  $k$ ; fällt man aus einem beliebigen Umfangspunkt  $P$  von  $k$  auf die Dreiecksseiten die Lote und unterwirft man diese einer Verdrehung um  $P$  durch irgendeinen Winkel  $\psi$ , so liegen die Schnittpunkte der drei gedrehten Lote mit den zugeordneten Dreiecksseiten immer auf einer Geraden  $p$  (siehe Figur 2, wo jetzt  $\varphi/2$  durch  $\psi$  zu ersetzen ist).

<sup>1)</sup> Wegen der sehr umfangreichen Literatur zur Dreiecksgeometrie sei bloss auf G. BERKHAN und W. F. MEYER, Enzykl. math. Wiss. III A B 10, verwiesen. Obige Ausführungen sind einer Vorlesung über «geometrische Grundlagen der Photogrammetrie» entnommen, die der Verfasser vor kurzem an der Technischen Hochschule Wien gehalten hat.

Für den Sonderfall  $\varphi = 0$  ergibt sich damit auf sehr einfache Weise der bekannte Satz von WALLACE<sup>1)</sup>. Die *Wallacesche Gerade*  $w$  erscheint in diesem Zusammenhang als Perspektivitätsachse zweier zusammengerückter Dreiecke.

4. Um von der perspektiven Lage zweier kongruenter Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$ , wie sie obigem Hilfssatz entspricht, zu einer räumlichen perspektiven Lage zu gelangen, werde zum Beispiel  $A_2B_2C_2$  um die Perspektivitätsachse  $p$  aus der Ebene  $\varepsilon_1$  von  $A_1B_1C_1$  herausgedreht. Lässt man dabei den Winkel  $\omega$  zwischen  $\varepsilon_1$  und der Ebene  $\varepsilon_2$  von  $A_2B_2C_2$  alle möglichen Werte annehmen, dann beschreibt das Zentrum  $S$  der räumlichen Kollineation bekanntlich den Kreis  $s$ , dessen Ebene zu  $p$  normal ist und dessen Mitte auf der Verschwindungsgeraden  $v_1$  der Ebene  $\varepsilon_1$  liegt. Dieser Kreis ist samt den beiden Dreiecken in Figur 2a im Seitenriss auf eine zu  $p$  normale Bildebene dargestellt. Das räumliche Perspektivitätszentrum  $S$  ist mithin eindeutig bestimmt, sobald neben  $A_1B_1C_1$  noch der Drehpol  $P$  auf dem Umkreis dieses Dreiecks und die Verdrehungswinkel  $\varphi$ ,  $\omega$  gegeben sind. Für  $\varphi = 0$ ,  $\omega \neq 0$  ist  $S$  insbesondere ein Fernpunkt.

Umgekehrt lassen sich zwei räumlich perspektiv liegende kongruente Dreiecke immer durch eine Verdrehung ihrer Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  um deren Schnittgerade  $p$  in die besondere Lage des Hilfssatzes bringen. Dabei ist nur darauf zu achten, dass diese Dreiecke nach der Vereinigung der Ebenen gleichen Umlaufsinn aufweisen. Andernfalls ergeben sich in  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  zwei ungleichsinnig kongruente perspektive Dreiecke; auf solche ist jedoch unser Hilfssatz zur Gänze nicht anwendbar.

5. Zur Lösung der eingangs erwähnten Aufgabe kann man auch das Dreieck  $abc$  festhalten und mit einer Ebene derart schneiden, dass die Schnittfigur zum gegebenen Dreieck  $ABC$  kongruent wird. Dies ist ebenfalls auf vier wesentlich verschiedene Arten möglich. Zwischen je zwei derartigen ebenen Schnitten besteht der soeben erläuterte Zusammenhang.

Im besonderen rücken zwei dieser Schnittdreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$  zusammen, wenn sowohl der Winkel  $\omega$  zwischen ihren Ebenen als auch der Winkel  $\varphi$  der Verdrehung um den Pol  $P$  gegen Null konvergiert. Bei diesem Grenzübergang geht der Umkreis  $k_2$  von  $A_2B_2C_2$  in den Umkreis  $k_1$  von  $A_1B_1C_1$  über, ferner das Zentrum  $Z$  in den Gegenpunkt  $G$  von  $P$  auf  $k_1$ . Da überdies die Gegenachse  $v_1$  von  $\varepsilon_1$  für  $\varphi \rightarrow 0$  zur Ferngeraden von  $\varepsilon_1$  wird, degeneriert der Kreis  $s$  nunmehr in die durch  $G$  gelegte Normale  $g$  zu  $\varepsilon_1$ . Das räumliche Perspektivitätszentrum  $S$  erhält somit eine Grenzlage, die dieser Geraden  $g$  angehört und durch den Grenzwert des Quotienten  $\varphi : \omega$  eindeutig bestimmt ist. Da  $\varphi$  und  $\omega$  unabhängig voneinander sind, kann  $S$  in jeden beliebigen Punkt von  $g$  fallen. Ferner kann der Pol  $P$  ebenso wie sein Gegenpunkt  $G$  jede beliebige Lage auf  $k_1$  einnehmen, so dass alle möglichen Geraden  $g$  den Zylinder mit dem Normalschnitt  $k_1$  bilden.

*Damit ist in der Tat bewiesen, dass die räumlichen Perspektivitätszentren  $S$  aller Paare kongruenter und perspektiver Dreiecke, die im gegebenen Dreieck  $ABC$  zusammengerückt sind, den Mantel des Drehzylinders erfüllen, der durch  $A, B, C$  geht und dessen Erzeugenden zur Ebene dieses Dreiecks normal sind.*

JOSEF KRAMES, Wien.

<sup>1)</sup> Siehe Fussnote auf Seite 107.