Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 5: **Zum 60.Geburtstag von Rolf Nevanlinna** mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = 0$$

der zugehörige Grenzwert

$$\lim_{\nu \to \infty} g(\mathfrak{x}_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} g(\varphi_\nu, \varphi) = \frac{1}{2} \neq 0 . \tag{9}$$

Übrigens lautet die Gleichung (7) in kartesischen Koordinaten unter Beibehaltung des dort Gesagten

$$z = g(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arc\,tg} y/x}{x^2 + y^2 + (\operatorname{arc\,tg} y/x)^2} . \tag{10}$$

Figur 1 zeigt im Ausschnitt die «analytische Landschaft» dieser Funktion in skizzenhafter axonometrischer Darstellung. HANS WAGNER, Karlsruhe.

Ungelöste Probleme

Nr. 7. Wir fragen uns: Gibt es einen Satz der ebenen kombinatorischen Geometrie, der wie folgt lautet: Werden je k Kreisbereiche einer endlichen Menge sich gegenseitig nicht überdeckender kongruenter Kreise der Ebene durch eine geeignete Gerade getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Kreisbereiche der Menge trifft? Welchen Wert hat die Stichzahl k, wenn ein derartiger Satz überhaupt existiert?

Man kann leicht einsehen, dass jedenfalls $k \geqq 5$ sein müsste. In der Tat: Betrachtet man die Menge der 5 Kreise, deren Mittelpunkte die Ecken eines regulären Fünfecks bilden und deren Radien gleich der halben Fünfeckseite sind, so weisen je 4 Kreise eine gemeinsame Sekante auf, während dies für alle 5 Kreise nicht der Fall ist.

Hat die Kreismenge die zusätzliche Eigenschaft, dass eine separierende Richtung in der Ebene so vorhanden ist, dass jede parallele Gerade höchstens einen Kreis der Menge trifft, so gilt die Aussage bereits mit $k = 3$. In diesem Fall können die Kreise übrigens durch Eibereiche beliebiger Form und Grösse ersetzt werden. Dies ist eine Verschärfung eines Resultats von P. VINCENSINI[1]), welche von V. L. KLEE jr. stammt[2]).

H. HADWIGER.

Nachtrag zu Nr. 6. Herr H. LENZ (München) teilte uns mit, dass die im letzten Absatz angegebene vermutete Schätzung $N_k(n) < n\,(k+1)/2$ unrichtig ist. Ein von ihm konstruiertes Beispiel zeigt, dass jedenfalls $N_k(n) \geqq (k-1)\,n - (k+1)\,(k-2)/2$ für $n > k$ gelten muss; für $k > 3$ und grosse n resultiert die Unrichtigkeit der Vermutung.

Aufgaben

Aufgabe 216. Gegeben sind zwei windschiefe Strecken AB und CD. Man konstruiere zwei berührend aneinanderschliessende Kreisbogen vom gleichen Radius, von denen der eine AB in A, der andere CD in C berührt. J. STROMMER, Budapest.

Lösung: Die beiden sich berührenden Kreise k_1 und k_2 liegen auf der Kugel K, die AB in A und CD in C berührt. Das Zentrum M von K ergibt sich, indem man die Schnitt-

[1]) Atti del Quarto Congresso dell'Unione Mat. Ital. *1951*, II, 454–464.

[2]) *Common Secants for Plane Convex Sets*, Proc. Amer. Math. Soc. *5*, 639–641 (1954).

gerade der Normalebenen zu AB und CD in A bzw. C mit der Symmetrieebene der Strecke AC zum Schnitt bringt. Die Schnittgerade s der beiden Kreisebenen ist eine die Kugel berührende Transversale der Geraden AB und CD. Weil k_1 und k_2 gleichen Radius haben, müssen die Abstände der Kreisebenen von M gleich sein. Drehen sich nun zwei Ebenen um AB und CD mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten aus den Anfangslagen ABM und CDM, so beschreibt ihre Schnittlinie w_1 ein Hyperboloid H_1. Bei Änderung des Drehsinns in einem Büschel erhält man ein zweites Hyperboloid H_2. Die Geraden w_1 bzw. w_2 bestimmen je eine Projektivität π_1 bzw. π_2 zwischen den Punktreihen AB und CD.

Die windschiefen Geraden AB und CD können als Erzeugende erster Art eines einschaligen Rotationshyperboloids aufgefasst werden, das von der Kugel K berührt wird. Sämtliche Erzeugende zweiter Art sind K berührende Transversalen t von AB und CD. Diese Transversalen bestimmen also zwei weitere Projektivitäten π_1^* bzw. π_2^* zwischen AB und CD. Die gesuchte Gerade s muss nun sowohl eine Gerade w als auch eine Gerade t sein. Sie ergibt sich also durch Aufsuchen der Doppelpunkte der Projektivität $\pi_k^{-1}\pi_i^*$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2)$. Von den 8 Lösungen sind sicher 4 reell, da die Geraden w_1 und w_2 bei der erwähnten Drehung der Ebenen beide einmal durch M gehen und, nach Drehung um 90°, zur reziproken Polaren von AC werden, um dann wieder nach M zurückzukehren. Jede Gerade w_i berührt also die Kugel sicher zweimal.

C. Bindschedler, Küsnacht; R. Lauffer, Graz.

Der Aufgabensteller setzt $\overline{AB} = \overline{CD}$. Durch eine Drehung um die Schnittgerade m der mittelsenkrechten Ebenen zu $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ können $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zur Deckung gebracht werden. Da m auch M enthält, kommen mit den Strecken auch die Kugelkreise, deren Bogen die Lösungen der Aufgabe sind, zur Deckung. Nimmt man den einen der Schnittpunkte von K und m als Pol einer stereographischen Projektion auf die zugehörige Äquatorebene, so hat man in dieser die Bilder $A'B'$ und $C'D'$ von AB und CD durch zwei Kreisbogen von *gleichem Radius* zu verbinden, die sowohl einander als auch $A'B'$ bzw. $C'D'$ berühren. Diese Aufgabe ist durch eine Ähnlichkeitstransformation lösbar.

Aufgabe 217. Bestimme alle natürlichen Zahlen $g \geqq 2$ mit folgender Eigenschaft: Im Zahlensystem mit der Grundzahl g gibt es für beliebige natürliche n Quadratzahlen, deren letzte Ziffer 1 ist, während die n unmittelbar vorangehenden Ziffern beliebig vorgegeben sind.

A. Bager, Hjørring (Dänemark).

Lösung des Aufgabenstellers: Im folgenden soll u eine ungerade natürliche Zahl bezeichnen und ferner sei

$$d = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i g^i,$$

wo die a_i ganze Zahlen sind. (Die Voraussetzung $0 \leqq a_i \leqq g-1$ ist unnötig).

a) $g = u$ (*eo ipso* $u \geqq 3$). p^ν sei eine der Primzahlpotenzen aus der kanonischen Zerlegung von u. Weil d quadratischer Rest $\bmod p$ ist, ist auch $x^2 \equiv d \pmod{p^{\nu(n+1)}}$ lösbar. Hieraus folgt die Lösbarkeit dieser Kongruenz $\bmod u^{n+1}$, das heisst, es gibt ein x^2, das in g-adischer Darstellung mit der Ziffernfolge $a_n a_{n-1} \ldots a_1 1$ endet.

b) $g = 2u$ $(u \geqq 1)$. Aus der Kongruenz $x^2 \equiv 1 + g \pmod{g^2}$ würde die unmögliche Kongruenz $x^2 \equiv 1 + 2u \equiv -1 \pmod 4$ folgen, also ist dieser Fall unmöglich.

c) $g = 4u$ $(u \geqq 1)$. Auch dieser Fall ist unmöglich, weil aus $x^2 \equiv 1 + g \pmod{g^2}$ die unmögliche Kongruenz $x^2 \equiv 1 + 4u \equiv 5 \pmod 8$ folgt.

d) $g = 2^\mu u$ $(\mu \geqq 3,\ u \geqq 1)$. Wegen $d \equiv 1 \pmod 8$ ist $x^2 \equiv d \pmod{2^{\mu(n+1)}}$ lösbar und daher nach a) auch $x^2 \equiv d \pmod{g^{n+1}}$.

Die gesuchten g sind also $g = u$ ($u \geqq 3$ ungerade) und $g = 8m$ ($m \geqq 1$ ganz).

Aufgabe 218. Man beweise die Relation

$$\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha + \vartheta)}{(n\alpha + \vartheta)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi,$$

wo ϑ eine feste Zahl ist, und die bekanntlich gilt für $\alpha \to 0$[1], für jeden Wert von α in $0 < \alpha \leqq \pi$.

MARTIN G. BEUMER, Bergen op Zoom (Holland).

Lösung des Aufgabenstellers: Man geht aus von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n+\beta) z}{n+\beta} = \pi$$

[vgl. zum Beispiel BROMWICH, *An introduction to the theory of infinite Series 1931*, 371, ex. (5)], wo β konstant ist, n eine ganze Zahl, und $0 < z < 2\pi$. Weil die Reihe gleichmässig konvergent ist in bezug auf z im geschlossenen Intervall (γ, δ), wo $0 < \gamma < \delta < 2\pi$, kann eine gliedweise Integration ausgeführt werden. Man bekommt so:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(n+\beta)\gamma}{(n+\beta)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(n+\beta)\delta}{(n+\beta)^2} = \pi(\delta-\gamma). \tag{1}$$

Bei konstantem δ und $\gamma \to 0$ vereinfacht sich (1) zu:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(n+\beta)\delta}{(n+\beta)^2} = \pi\delta,$$

weil die erste Reihe in (1) gleichmässig konvergent ist und daher eine stetige Funktion von γ darstellt. Mit $\delta = 2\alpha$ und $\alpha\beta = \vartheta$ erhalten wir für $0 < \alpha < \pi$:

$$\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha+\vartheta)}{(n\alpha+\vartheta)^2} = \pi,$$

eine Relation, die, wie man leicht sieht, auch noch gilt für $\alpha = \pi$.

Aufgabe 219. Eine projektive Ebene ist definiert als eine Gesamtheit von «Punkten» und «Geraden», so dass je zwei Punkte eine Gerade bestimmen, je zwei Gerade einen Punkt gemein haben, jede Gerade mindestens drei Punkte enthält und mindestens zwei Gerade existieren. Man zeige: Ist eine projektive Ebene mit n Punkten auf jeder Geraden echter Teil einer projektiven Ebene mit N Punkten auf jeder Geraden, so ist $N-1 \geqq (n-1)^2$.

H. LENZ, München.

Lösung: Liegen in einer finiten Geometrie n Punkte auf jeder Geraden, dann gehen durch jeden Punkt genau n Geraden und es gibt daher in der Ebene π $1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$ Punkte und ebensoviele Geraden. Ist π echte Teilebene der endlichen projektiven Ebene π', so gibt es auf einer Geraden g von π einen Punkt P, der π', aber nicht π angehört. Die Verbindungsgeraden von P mit den $n^2 - n + 1 - n = (n-1)^2$ nicht auf g liegenden Punkten Q_i von π sind voneinander und von g verschieden, denn die Verbindungsgerade zweier Punkte Q_i schneidet g in einem Punkt von π, also nicht in P. Es gibt also in π' mindestens $(n-1)^2 + 1$ Geraden durch P, also ist $N \geqq (n-1)^2 + 1$.

H. LENZ, München; R. LAUFFER, Graz.

Bemerkungen von R. LAUFFER.

1. Aus einer Geometrie mit n Punkten auf jeder Geraden entsteht durch j-malige Erweiterung (Adjunktion eines Punktes P im obigen Sinn) eine Geometrie mit $(n-1)^{2^j} + 1$ Punkten auf jeder Geraden.

2. Beispiel: Die finite Geometrie über dem Galoisfeld $GF(2)$ mit den Zahlen 0, 1 $(1+1=0)$ ist Teil der finiten Geometrie über $GF(4)$ mit den Zahlen $0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2$, $(1+\varepsilon+\varepsilon^2=0,\ x+x=0,\ \varepsilon^3=1)$. Die sieben Punkte der Geometrie über $GF(2)$ sind (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)[2]. Die 21 Punkte der

---

[1]) ALBERT EINSTEIN, Ann. Physik *33*, 1924 (1910).

[2]) Drei «Punkte» (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) $i = 1, 2, 3$ liegen auf einer «Geraden», wenn die Determinante $|x_{ik}|$ verschwindet (Red.).

Geometrie über $GF(4)$ sind die sieben oben angeführten Punkte und die 14 Punkte $(1, \varepsilon, 0)$, $(1, \varepsilon^2, 0)$, $(1, 0, \varepsilon)$, $(1, 0, \varepsilon^2)$, $(0, 1, \varepsilon)$, $(0, 1, \varepsilon^2)$, $(1, 1, \varepsilon)$, $(1, 1, \varepsilon^2)$, $(1, \varepsilon, 1)$, $(1, \varepsilon^2, 1)$, $(1, \varepsilon, \varepsilon)$, $(1, \varepsilon^2, \varepsilon^2)$, $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, $(1, \varepsilon^2, \varepsilon)$. Es ist $N = 4 + 1 = 5$, $n = 2 + 1 = 3$ und daher $N - 1 = (n-1)^2$.

Aufgabe 220. Der Punkt P teilt die Seite BC des Dreiecks ABC im Verhältnis $\overline{BP}:\overline{PC} = 1:2$ (innere Teilung). Ferner ist $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle APC = 60°$. Man berechne allein mit elementarer euklidischer Geometrie (ohne Trigonometrie) die Grösse des Winkels ACB. F. GOLDNER, London.

Lösung: Trägt man auf der Geraden PA von P aus in Richtung nach A hin ein Drittel der Seite BC auf, so erhält man den Umkreismittelpunkt U des gegebenen Dreiecks ABC. Das sieht man so ein: Das Dreieck PUC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Daher ist $\sphericalangle PCU = \sphericalangle PBU = 30°$ und $\overline{UC} = \overline{UB}$. Ferner ist $\sphericalangle PAB = 60° - 45° = 15° = \sphericalangle ABU$, also $\overline{UB} = \overline{UA}$. Weil $\sphericalangle CUP = 90°$, ist $\triangle AUC$ gleichschenklig-rechtwinklig, also $\sphericalangle ACU = 45°$. Hieraus folgt $\sphericalangle ACB = 45° + 30° = \underline{75°}$.

Lösungen sandten: A. BAGER (Hjørring, Dänemark), G. BALASTÈR (Zürich), F. BERKES (Szeged), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), R. BEREIS (Wien), M. G. BEUMER (Enschede, Holland), J. ERDÖSI (Budapest), R. JAKOBI (Braunschweig), A. KANTOR (Debrecen), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), E. SCHMITT (Dillingen, Saar), J. SCHOPP (Budapest), R. SPRANK (Luxemburg), J. P. SYDLER (Zürich), H. WAGNER (Karlsruhe), J. VIGASSY (Budapest) (2 Lösungen), G. N. VLAHAVAS (London), W. ZULLIGER (Küsnacht) (4 Lösungen), I. ZANA (Budapest).

Neue Aufgaben

249. Man bestimme sämtliche Kurven mit der Eigenschaft, dass die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt T die Verbindungsstrecke zweier gegebener Punkte A, B im Verhältnis $\overline{AT}^2:\overline{BT}^2$ schneidet. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

250. Ist in der Ebene eine Menge von n Punkten gegeben, deren Durchmesser (maximale Entfernung eines Punktepaares) Eins ist, so kann bekanntlich[1]) die Entfernung 1 höchstens n-mal vorkommen.

Es sei nun eine Menge von $3n$ Punkten mit dem Durchmesser 1 gegeben. Dann gibt es höchstens $3n^2$ Punktepaare mit einer Entfernung $\geqq 1/\sqrt{2}$. Der Satz lässt sich nicht verschärfen, selbst wenn man $1/\sqrt{2}$ durch $1 - \varepsilon$ ersetzt.

P. ERDÖS, Birmingham.

251. Es ist

$$N(x) = N(x-6) + x$$

und $N(-5) = N(-4) = N(-3) = N(-2) = N(-1) = 0$ und $N(0) = 1$. Man zeige, dass

$$\frac{(x+1)(x+5)}{12} \leqq N(x) \leqq \frac{x^2 + 6x + 12}{12}.$$

Diese Abschätzung ersetzt für ganze Zahlen x eine independente Darstellung von $N(x)$. R. LAUFFER, Graz.

252. Man denke sich die Wurzeln der Gleichung

$$z^3 + 12(1 + i\sqrt{3})z + A = 0$$

als Punkte in der komplexen Ebene abgebildet. Für welche Werte von A liegen diese Punkte auf einer Geraden? M. G. BEUMER (Enschede, Holland).

[1]) Vgl. Jber. D.M.V. *43*, 114 (1934).

253. Démontrer pour $-\pi < x < \pi$

$$\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5} - \cdots = x\cos^2\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\sin x .$$

H. BREMEKAMP, Delft.

254. Man berechne die Determinante $|g_{ik}|$, wo

$$g_{ik} = \frac{a x_i - b y_k}{x_i - y_k}, \quad x_i \neq y_k,\ i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

E. TROST, Zürich.

Symposium zur Erinnerung an Henri Fehr

Genf, 1.–2. Juli 1955

Aus Anlass der ersten Sitzung des Exekutivkomitees der neu organisierten Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (CIEM) fand an der Universität Genf ein internationales Symposium statt, das den wissenschaftlichen Grundlagen des Mathematikunterrichts im Spannungsfeld zwischen Mittelschule und Hochschule gewidmet war. Die Veranstaltung stand im Zeichen der Erinnerung an den 1954 verstorbenen Ehrenpräsidenten der CIEM, HENRI FEHR, der zu den Gründern dieser Organisation gehörte und ihre Geschäfte während 44 Jahren als Generalsekretär von Genf aus leitete.

Wie der Präsident der CIEM, H. BEHNKE (Münster, Westfalen), in seiner Eröffnungsansprache hervorhob, hat Genf zu der Arbeit der CIEM insofern noch eine besondere Beziehung, als es das Institut von J. PIAGET beherbergt, zu dessen Arbeitsgebiet auch das Studium der psychologischen Grundlagen für die ersten Anfänge mathematischer Ausbildung gehört. Das Symposium wurde durch zwei Referate aus diesem Gebiet eingerahmt. Im ersten Vortrag mit dem Titel *Géométrie spontanée de l'enfant* berichtete Frl. INHELDER über experimentelle Untersuchungen, durch welche zum Beispiel festgestellt werden soll, wie sich beim Kind die einfachsten geometrischen Begriffe bilden. Es zeigt sich eine stetige Entwicklung, die von einem amorphen Raum ohne Konstanz der Distanzen ausgeht und zunächst zu einfachen Unterscheidungen topologischer Art wie «innen» und «aussen» führt, um schliesslich mit der Erarbeitung der Euklidischen Raumstruktur zu enden. In der brillanten Vorlesung Prof. PIAGETS, die der Vizepräsident der CIEM, G. KUREPA (Zagreb), in seinem Schlusswort die Perle des Symposiums nannte, wurden verschiedene psychologische Strukturen diskutiert, auf deren Konstruktion die intellektuelle Entwicklung beruht. Die Feststellung PIAGETS, dass diese Strukturen mit gewissen algebraischen Strukturen der Bourbakischule in Zusammenhang gebracht werden können, beleuchtete die Bedeutung des Bourbakischen Systems für einen einheitlichen Aufbau der gesamten Mathematik von einer neuen Seite und ist geeignet, die Tendenzen nach einem Einbau Bourbakischer Gedanken in den mathematischen Mittelschulunterricht zu unterstützen.

Über *Axiomatic Treatments of Mathematics in Secondary Schools* sprach S. BUNDGAARD (Aarhus, Dänemark). Seinen Ausführungen konnte man entnehmen, dass der Mittelschulunterricht in Dänemark auf dem Wege zu einer stärkeren Axiomatisierung und Abstraktion schon weit vorangeschritten ist. Nach der Ansicht des Vortragenden sind die dänischen Schüler mehr am allgemeinen axiomatischen Denken interessiert als an speziellen Problemen. Als Beispiele der «Axiomatik im Grossen» dienen die Axiomensysteme von EUKLID und HILBERT, während von der «Axiomatik im Kleinen» überall dort Gebrauch gemacht wird, wo die Existenz einer Grösse oder einer Figur mit bestimmten Eigenschaften vorausgesetzt wird, zum Beispiel beim Einführen der kom-