**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 10 (1955)
**Heft:** 6

**Artikel:** Über mehrfache Kreislagerungen
**Autor:** Heppes, A.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-18087

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

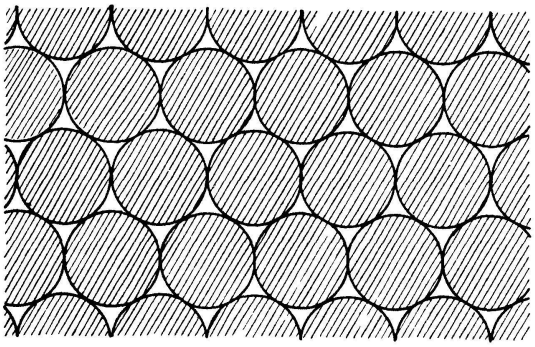
**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

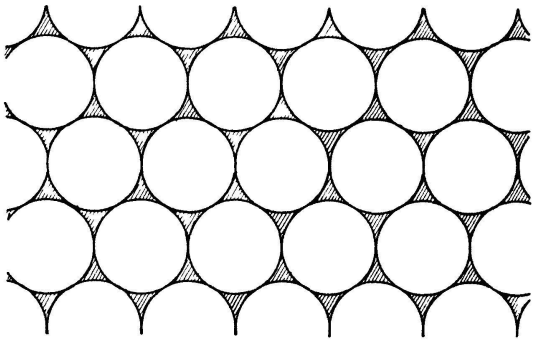
# Über mehrfache Kreislagerungen

Wir streuen in der euklidischen Ebene (abzählbar) unendlich viele kongruente abgeschlossene Kreisscheiben aus. Gehört ein jeder Punkt zum Inneren von höchstens $k$ Kreisen, so sprechen wir von einer *$k$-fachen Kreislagerung*. Gehört dagegen jeder Punkt zu wenigstens $k$ Kreisen, so handelt es sich um eine *$k$-fache Kreisüberdeckung*.

Wir bezeichnen mit $\delta_k$ und $\Delta_k$ die (obere bzw. untere) Dichte[1]) einer $k$-fachen Kreislagerung bzw. einer $k$-fachen Kreisüberdeckung und betrachten die obere und untere



Figur 1



Figur 2

Grenze $d_k = \sup \delta_k$ und $D_k = \inf \Delta_k$ der Zahlen $\delta_k$ bzw. $\Delta_k$, erstreckt über alle $k$-fachen Kreislagerungen bzw. Kreisüberdeckungen[2]). Bekanntlich gilt[1])

$$d_1 = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1{,}209\ldots.$$

Ferner haben wir offensichtlich

$$k\,d_1 \leqq d_k < k \quad \text{und} \quad k\,D_1 \geqq D_k > k.$$

FEJES TÓTH bemerkte, dass von einem gewissen Wert von $k$ an $d_k > k\,d_1$ und $D_k < kD_1$ ausfällt. Wir betrachten nämlich die dichteste einfache Kreislagerung (Figur 1) und legen eine genügend grosse Anzahl von kongruenten Kreisschichten so aufeinander, dass die Lücken der einzelnen Schichten (Figur 2) die Ebene völlig überdecken. Lässt sich eine solche Überdeckung durch etwa $m$ Kreisschichten durchführen, so entsteht eine $(m-1)$-fache Kreislagerung mit der Dichte $m\,d_1$. Folglich ist $d_{m-1} \geqq m\,d_1$. In analoger Weise sieht man die Gültigkeit der Ungleichung $D_{n-1} \leqq n\,D_1$ von einem genügend grossen Wert von $n$ ein.

Im folgenden beschränken wir uns auf Kreislagerungen und zeigen, dass die Ungleichung $d_k > k\,d_1$ schon für $k = 2$ besteht. Genauer *werden wir für ein jedes* $k \geqq 2$

[1]) S. L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Verlag Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).

[2]) Das Problem der Bestimmung von $d_k$ und $D_k$ warf Herr Professor L. FEJES TÓTH in einer an der Universität von Budapest im Wintersemester 1953/54 gehaltenen Vorlesung auf.

*eine k-fache Kreislagerung von einer Dichte*

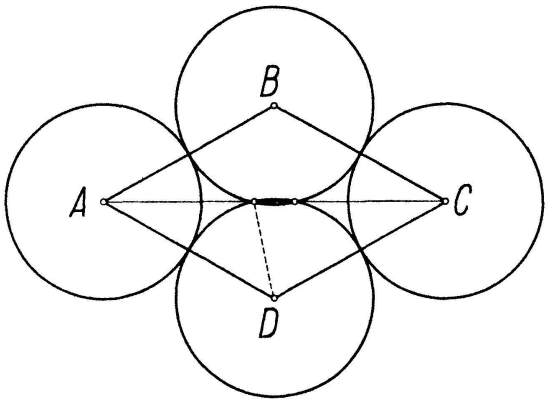
$$\frac{8\pi}{7\sqrt{15}}k$$

*konstruieren.* Die Konstante

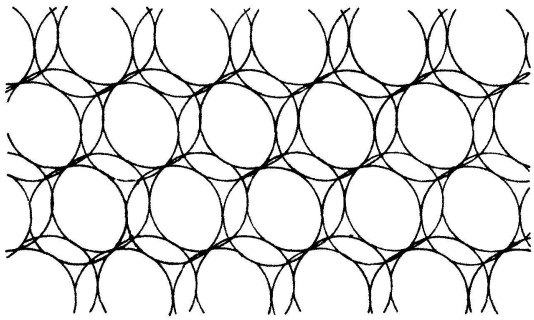
$$\frac{8\pi}{7\sqrt{15}} = 0{,}9270\ldots$$

übertrifft mit mehr als 2% die Dichte $d_1$.

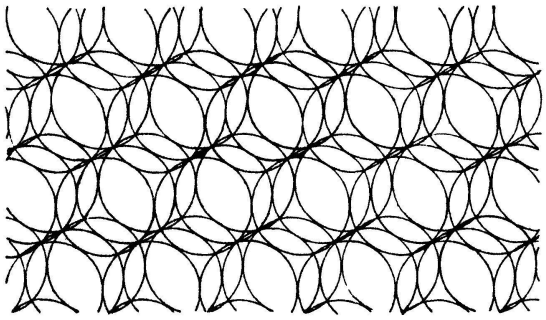
Die Frage, ob unsere Konstruktion etwa für $k = 2$ oder 3 die dichteste Kreislagerung liefert, bleibt offen. Ebenso ist der kleinste Wert von $k$, für den $D_k < k\,D_1$ ausfällt, noch nicht bekannt.




Figur 3



Figur 4



Figur 5

Es sei $ABCD$ ein Rhombus von der Seitenlänge 2 mit der Diagonalen $AC = 7/2$. Wie eine elementare Rechnung zeigt, zerlegen die um $A$, $B$, $C$ und $D$ geschlagenen Einheitskreise $AC$ in vier Strecken der Länge 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1 (Figur 3). Der Inhalt von $ABCD$ beträgt $7\sqrt{15}/8$. Folglich ist die Dichte der vier Einheitskreise bezüglich des Rhombus $8\pi/7\sqrt{15}$. Natürlich besitzt das durch das Grundparallelogramm $ABCD$ erzeugte Einheitskreisgitter $G$ dieselbe Dichte.

Wir verschieben $G$ in der Richtung $AC$ um die Strecke 1/2. Dann fallen die zweifach bedeckten Teile des verschobenen Gitters $G'$ eben in gewisse Lücken des ursprünglichen Gitters $G$. Umgekehrt liegen die zweifach bedeckten Teile von $G$ in gewissen Lücken von $G'$. Daraus folgt, dass durch die Vereinigung der Kreise von $G$ und $G'$ eine zweifache Kreislagerung von der Dichte $2 \cdot 8\pi/7\sqrt{15}$ entsteht (Figur 4). Fügen wir zu dieser Kreislagerung noch die Kreise desjenigen Kreisgitters $G''$ hinzu, das von

$G'$ durch dieselbe Verschiebung hervorkommt als $G'$ von $G$ (Figur 5), so haben wir eine dreifache Kreislagerung von der Dichte $3 \cdot 8\pi/7\sqrt{15}$ vor uns usw.

Die folgende Bemerkung rührt von FEJES TÓTH her. Eine neue Richtung in der Theorie der regulären Figuren versucht, die Regularität durch irgendeine Extremaleigenschaft zu erfassen. So sind zum Beispiel mehrere Extremaleigenschaften verschiedener Figurengitter bekannt. Die oben angegebene zweifache Kreislagerung lässt vermuten, dass sich durch eine natürliche Extremalforderung auch ein reguläres, aber nicht gitterförmiges Punktsystem charakterisieren lässt.

A. HEPPES, Budapest.

---

# Kleine Mitteilungen

## Verallgemeinerung eines elementaren Satzes von Laplace

Auf LAPLACE geht der folgende Satz der Himmelsmechanik zurück: Es sei ein System von drei nicht-kollinearen gravitierenden Massenpunkten gegeben. Dann gehen die Kräfte, die je zwei Massenpunkte auf den jeweiligen dritten ausüben, durch ein und denselben Punkt, und dieses Kräftezentrum fällt dann und nur dann mit dem Massenmittelpunkt des Systems zusammen, wenn die Massenpunkte auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen. – Wir wollen hier nun zeigen, dass dieser Satz (wie so viele Sätze der Himmelsmechanik) keineswegs für die Gravitation charakteristisch ist, sondern für praktisch alle Zentralkräfte gilt in der folgenden Form: Es sei ein System von drei nicht-kollinearen Massenpunkten gegeben, die wechselseitig mit Kräften aufeinander wirken, die nur von den gegenseitigen Abständen abhängen. Dann gehen die Kräfte, die je zwei Massenpunkte auf den dritten ausüben, sämtlich durch ein und denselben Punkt. Sind überdies die Kräfte zwischen je zwei Massenpunkten streng monotone Funktionen des Abstandes und sind sie den Massen proportional, so fällt das Kräftezentrum dann und nur dann in den Massenmittelpunkt, wenn die Massenpunkte auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen.

Der Beweis erfolgt sehr einfach durch Ausrechnen. Es seien $m_1, m_2, m_3$ die drei Massen, $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ ihre Ortsvektoren und $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ die Kräfte, die bzw. auf den ersten, zweiten, dritten Massenpunkt einwirken. Schliesslich bezeichnen wir mit $F_{12}, F_{23}, F_{31}$ die Beträge der Kraft bzw. zwischen dem ersten und zweiten Massenpunkt usw. Dann gilt

$$\mathfrak{K}_1 = F_{12}\,\frac{\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1|} + F_{13}\,\frac{\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1|} \quad \text{usw.}$$

Wir setzen

$$\frac{F_{12}}{|\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1|} = \frac{1}{f_3} \quad \text{usw.}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1 &= \frac{\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1}{f_3} + \frac{\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1}{f_2} \\
&= \frac{1}{f_2 f_3}\,\{f_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1) + f_3(\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1)\} \\
&= \frac{1}{f_2 f_3}\,\{f_1(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_1) + f_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1) + f_3(\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1)\} \\
&= \frac{1}{f_2 f_3}\,\{f_1\mathfrak{r}_1 + f_2\mathfrak{r}_2 + f_3\mathfrak{r}_3\} - \frac{f_1+f_2+f_3}{f_2 f_3}\,\mathfrak{r}_1 \\
&= f_1\,\frac{f_1+f_2+f_3}{f_1 f_2 f_3}\left\{\frac{f_1\mathfrak{r}_1+f_2\mathfrak{r}_2+f_3\mathfrak{r}_3}{f_1+f_2+f_3} - \mathfrak{r}_1\right\} \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$