

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

auslaufenden Halbsehne bezeichnet. Nun wende man die Aussage ac) im «orthogonalen» Fall an.

Erweiterungen der Sätze über stetige Richtungsfunktionen der hier besprochenen Art auf Räume höherer Dimensionen sind nur in einzelnen Fällen bekannt. So haben H. YAMABE und Z. YUJOCO¹⁾ das Theorem von S. KAKUTANI verallgemeinert. Danach nimmt eine stetige Richtungsfunktion des k -dimensionalen Raumes in k paarweise orthogonalen Richtungen den nämlichen Wert an. Hier stellt sich das Problem, alle Aussagen, die oben im Falle des gewöhnlichen Raumes erläutert worden sind, sinngemäss auf Räume beliebiger Dimension zu übertragen. H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 221. Alle vier Seitenflächen eines Tetraeders sollen gleichen Flächeninhalt haben. Man beweise, dass folgende drei Punkte zusammenfallen:

1. Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heisst der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel.
2. Der Mittelpunkt der Umkugel, das heisst der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel.
3. Der Schwerpunkt des Tetraeders.

F. GOLDNER, London.

Lösung: Zu einem beliebigen Dreieck als Grundfläche kann man direkt ein Tetraeder mit den vorausgesetzten und behaupteten Eigenschaften finden, indem man durch die Ecken des Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten zieht und die so entstehenden vier kongruenten Dreiecke als Netz des Tetraeders auffasst. Weil die Umkreise der Seitenflächen dieses Tetraeders kongruent sind, hat der Mittelpunkt der Umkugel von den Seitenflächen gleiche Abstände und fällt also mit dem Inkugelmittelpunkt zusammen. Der Abstand des Tetraederschwerpunktes von einer Seitenfläche ist gleich einem Viertel der zugehörigen Tetraederhöhe. Aus der Betrachtung des Volumens folgt, dass die Tetraederhöhen gleich lang sind, also fällt der Schwerpunkt in den Inkugelmittelpunkt.

Das angegebene Tetraeder ist aber auch das einzige mit flächengleichen Seitenflächen. Geometrische Örter für die Spitze des zum gegebenen Dreieck als Grundfläche gehörenden Tetraeders sind drei Kreiszyylinder, von denen jeder eine Dreiecksseite als Achse und die zugehörige Dreieckshöhe als Radius hat. Ihre Durchdringungen haben die Grundfläche zur Symmetrieebene und projizieren sich also darauf als drei Kurvenbögen zweiter Ordnung (Hyperbelbögen) eines durch vier Grundpunkte bestimmten Kegelschnittbüschels, indem jede Kurve durch die vier Schnittpunkte der beiden andern geht. Drei der Grundpunkte sind aber identisch mit den Ecken des erwähnten Netz-Dreiecks, die zugehörigen Zylinderschnittpunkte liegen in der Ebene der Grundfläche und ergeben keine eigentlichen Tetraeder. Es verbleibt der vierte Grundpunkt als Höhenfusspunkt des einzig möglichen Tetraeders.

Es sei noch bemerkt, dass die Höhe h sich in folgender Weise durch die Seiten a, b, c der Grundfläche ausdrückt:

$$h = \frac{2}{2\sqrt{2}F} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}, \quad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

G. BALASTÈR, Zürich.

Die Tatsache, dass die Seitenflächen des Tetraeders bei gleichem Flächeninhalt kongruent sind, woraus die behaupteten Eigenschaften wie oben unmittelbar folgen,

¹⁾ Osaka math. J. 2, 19-22 (1950).

beweist R. LAUFFER (Graz) folgenderweise: Projiziert man das Tetraeder parallel zu einer Kante, dann ist die Normalprojektion ein gleichschenkliges Dreieck. Die Achse dieses Dreiecks ist Projektion der Binormalen eines Gegenkantenpaares. Es halbiert daher die Binormale eines Gegenkantenpaares diese Kanten. Projiziert man das Tetraeder auf die zu den Kanten \overline{AB} , \overline{CD} parallele Ebene, dann ist die Normalprojektion ein Parallelogramm. Da auch die Kanten \overline{BC} und \overline{DA} durch ihre Binormale (die in dieser Projektion Hauptgerade ist) halbiert werden, muss die Projektion ein Rechteck sein. Es ist daher jede Kante gleich ihrer Gegenkante, und die Flächen sind kongruent.

Wie mehrere Löser bemerkten, sind noch viele andere Eigenschaften dieses «gleichseitigen Tetraeders» bekannt. Vergleiche etwa COUDERC-BALLICIONI, *Premier livre du tétraèdre*, S. 164.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), M. G. BEUMER (Enschede), A. KANTOR (Debrecen), J. SCHOPP (Budapest), J. P. SYDLER (Zürich), G. N. VLAHAVAS (London).

Aufgabe 222. Bei welchen ebenen Kurven ist jeder Kurvenpunkt seine eigene vierte Krümmungsmitte? R. BEREIS, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Verstehen wir unter $h(\varphi)$ die Stützfunktion einer ebenen Kurve c (h und φ sind somit polare Speerkoordinaten), dann fällt die vierte Krümmungsmitte T_4 offensichtlich dann und nur dann in den zugehörigen Kurvenpunkt T , wenn

$$h + h'' = h'' + h^{(4)},$$

also

$$h - h^{(4)} = 0 \tag{1}$$

ist.

Aus (1) folgt durch Differentiation nach φ

$$h' - h^{(5)} = 0$$

und in weiterer Folge

$$h^{(n)} - h^{(n+4)} = 0, \tag{2}$$

woraus folgt, dass die Existenz von (1) nicht nur das Zusammenfallen von T_4 mit T , sondern auch die Identität von T_5 mit T_1 , allgemeiner die Identität von T_{n+4} mit T_n zur Folge hat.

Zur Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 4. Ordnung (1) mit konstanten Koeffizienten verwendet man bekanntlich den Ansatz

$$h = e^{\lambda\varphi}.$$

Man erhält sodann die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - 1 = 0 \tag{3}$$

und mithin als allgemeines Integral

$$\underline{h = C_1 e^\varphi + C_2 e^{-\varphi} + C_3 e^{i\varphi} + C_4 e^{-i\varphi}.} \tag{4}$$

Die durch (4) gekennzeichneten ebenen Kurven enthalten folgende erwähnenswerten Sonderfälle:

1. $h = e^\varphi$, eine *logarithmische Spirale*, die das Strahlbüschel ihres Spiralspunktes unter $\pi/4$ durchsetzt. Jede höhere Evolute geht aus der vorhergehenden durch eine Vierteldrehung um ihren Spiralspunkt hervor.

2. $h = (e^\varphi + e^{-\varphi})/2$, eine *Hyperzykloide*. Die höheren Evoluten sind abwechselnd Parazykloiden und Hyperzykloiden, und zwar sind alle Evoluten ungerader Ordnung Parazykloiden, alle gerader Ordnung Hyperzykloiden. Gleichartige Evoluten sind entweder identisch oder gehen durch zentrische Spiegelung auseinander hervor.

3. $h = (e^\varphi - e^{-\varphi})/2$, eine *Parazykloide*. Es gelten dieselben Bemerkungen wie bei 2. in sinngemässer Vertauschung.

4. $h = C_1 e^{i\varphi} + C_2 e^{-i\varphi}$ oder $h = A \cos \varphi + B \sin \varphi$, mithin ein *Strahlbüschel*. Bei dieser trivialen Lösung fallen sämtliche Krümmungsmitten nach T .

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und H. WAGNER (Karlsruhe).

Aufgabe 223. Calculer

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\alpha}{n} + \sin 2 \frac{\alpha}{n} + \dots + \sin \alpha}{\frac{\alpha}{n} + \frac{2\alpha}{n} + \dots + \alpha};$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha}{n}}{\alpha + \frac{\alpha}{2} + \dots + \frac{\alpha}{n}}.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

Lösung: 1. Es sei $\alpha \neq 0$. Wir setzen $t = \alpha/n$, dann ist bei Summation von $i = 1$ bis $i = n$ und Bildung des Limes für $t \rightarrow 0$

$$\lim \frac{\sum \sin i t}{\sum i t} = \frac{\lim t \sum \sin i t}{\lim t \sum i t} = \frac{1}{\lim t^2 \sum i} \int_0^\alpha \sin x dx = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\lim (t + \alpha) \alpha} = \frac{4 \sin^2 \alpha / 2}{\alpha^2}.$$

R. LAUFFER, Graz; W. STRICKLER, Zürich.

Die andern Löser benutzten die bekannte Formel für $\sum \sin i t$.

2. Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ der gesuchte Grenzwert. Aus der Ungleichung

$$\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha^3}{3! k^3} < \sin \frac{\alpha}{k} < \frac{\alpha}{k} \quad (\alpha > 0)$$

folgt

$$\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{\alpha^3}{3!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \sum_{k=1}^n \sin \frac{\alpha}{k} < \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Also ist

$$1 - \varepsilon_n < S_n < 1,$$

wo

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^n 1/k^3}{3! \sum_{k=1}^n 1/k}.$$

Weil $\sum 1/k^3$ konvergiert und $\sum 1/k$ divergiert, kann ε_n beliebig klein gemacht werden. Somit ist $S = 1$.

Lösungen von dieser Art sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), A. KÁNTOR (Debrecen), K. RIEDER (Riehen), R. ROSE (Saarbrücken), H. WAGNER (Karlsruhe).

Das obige Resultat kann auch unmittelbar aus folgendem Satz von STOLZ¹⁾ gefolgert werden: Sind α_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) irgendwelche positive Zahlen, für die die Summen $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ nach $+\infty$ streben, so folgt aus $x_n \rightarrow \xi$, dass auch

$$x'_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \rightarrow \xi.$$

Den Satz von STOLZ oder mit diesem verwandte Aussagen benutzen die Lösungen von L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), M. G. BEUMER (Enschede), R. LAUFFER (Graz), W. STRICKLER (Zürich).

¹⁾ Vgl. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (J. Springer, Berlin 1924), S. 74.

Aufgabe 224. In einem Dreieck seien zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Es sei $a > b$ und $b/a = v$. Dann ist der Winkel gegenüber b die Summe der Reihe

$$\beta = v \sin \gamma + \frac{v^2}{2} \sin 2 \gamma + \frac{v^3}{3} \sin 3 \gamma + \dots$$

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

Lösung: Man zeichne das Dreieck mit den Seiten $BC = 1$, $CA = v$, $AB = w$ und der Höhe $AU = v \sin \gamma$. Aus dem Teildreieck ABU ergibt sich sofort

$$w e^{i\beta} = 1 - v \cos \gamma + i v \sin \gamma = 1 - v e^{-i\gamma}.$$

Folglich ist

$$\beta = \Im [\log (1 - v e^{-i\gamma})] \quad (\text{Hauptwert})$$

$$\beta = -\Im \left[\sum_1^{\infty} \frac{v^n e^{-in\gamma}}{n} \right] = \sum_1^{\infty} \frac{v^n \sin n \gamma}{n}.$$

WILLY LÜSSY, Winterthur.

L. BERNSTEIN (Tel-Aviv) und R. LAUFFER (Graz) gewinnen die Reihe für β auf reellem Wege durch Taylorsche Entwicklung der Funktion

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{v \sin \gamma}{1 - v \cos \gamma}.$$

Die Reihe für β findet man auch in H. DÖRRIE, *Unendliche Reihen* (R. Oldenbourg, München 1951), S. 680.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), J. BEST (Amsterdam), C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), H. WAGNER (Karlsruhe), J. ZBORNIK (Chur).

Aufgabe 225. Gegeben sind drei konzentrische Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 1/\sqrt{2}$, $r_3 = 1/\sqrt{3}$. Man wähle auf jedem der drei Kreise k_i je einen Punkt P_i derart, dass ein Dreieck mit maximalem Umfang entsteht.

Man zeige ferner (für beliebige Radienverhältnisse), dass die gemeinsame Kreismitte stets Inkreismitelpunkt aller Dreiecke mit maximalem Umfang ist. R. BEREIS, Wien.

Lösung: Der Aufgabensteller teilt folgenden allgemeineren Satz mit: Liegt von einem Dreieck je ein Eckpunkt A_i ($i = 1, 2, 3$) auf einer Kurve C_i , so gehen die Kurvennormalen in den Dreiecksecken durch den Inkreismitelpunkt, wenn der Dreiecksumfang ein relatives Extremum aufweist. Denkt man sich nämlich ein den Kurven C_i eingeschriebenes Dreieck mit extremem Umfang gefunden und hält zum Beispiel die Ecken A_2 und A_3 fest, so kann sich A_1 nur auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A_2 und A_3 bewegen, wenn der Dreiecksumfang unverändert bleiben soll. C_1 muss also in der Umgebung von A_1 auf derselben Seite dieser Ellipse verlaufen und diese in A_1 berühren. Die Kurvennormale an C_1 in A_1 muss also die zu A_1 gehörende Innenwinkelhalbierende des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ sein. Da dies in analoger Weise auch für die beiden andern Ecken gilt, ist der Satz bewiesen.

Sind die C_i konzentrische Kreise mit den Radien r_i , deren Mittelpunkt also mit dem Inkreismitelpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zusammenfällt, so genügt zur Konstruktion der Dreiecke mit extremem Umfang die Kenntnis des Inkreisradius ϱ . Zur Bestimmung von ϱ benutzt J. ZBORNIK (Chur) die Beziehungen

$$\sin \frac{\alpha_i}{2} = \varrho r_i^{-1}, \quad \sum \cos \alpha_i = 3 - 2 \sum \sin^2 \frac{\alpha_i}{2} = 1 + 4 \prod \sin \frac{\alpha_i}{2}.$$

Für die in der Aufgabe angegebenen r_i ergibt sich für ϱ die kubische Gleichung

$$2 \varrho^3 \sqrt{6} + 6 \varrho^2 - 1 = 0$$

mit der reellen Lösung $\varrho = (2 \cos 20^\circ - 1)/\sqrt{6}$. C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) gibt das Beispiel $r_1 = 1$, $r_2 = 1/\sqrt{2}$, $r_3 = 1/\sqrt{5}$ an, für welches die kubische Gleichung reduzibel ist und die Lösung $\varrho = 1/\sqrt{10}$ besitzt, so dass das gesuchte Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Der Aufgabensteller führt das Problem mittels einer Inversion auf die Aufgabe zurück, ein Dreieck mit maximaler Fläche zu zeichnen, das drei konzentrischen Kreisen eingeschrieben ist (siehe Aufgabe 183, Lösung in *El. Math.* 9, 70 [1954]).

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und I. ZANA (Budapest).

Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 215 (*El. Math.* 10, 91 [1955]). In der Lösung der Aufgabe 215 ist leider ein Irrtum unbeachtet geblieben. Die Begriffe «triangle pédal» und «triangle podaire» sind verwechselt worden. Dies mag zum Teil davon kommen, dass sich unseres Wissens für den ersten dieser Begriffe kein deutscher Name eingebürgert hat. Es handelt sich um ein Indreieck des ursprünglichen Dreiecks ABC , dessen Ecken durch die Transversalen MA , MB , MC eines beliebigen Punktes M bestimmt werden.

Wir bitten, diesen Irrtum zu entschuldigen, und bringen hier die sehr einfache *Lösung des Aufgabenstellers*:

On voit tout de suite que si les coordonnées barycentriques de M sont m, n, r

$$\frac{(A'B'C')}{(ABC)} = \frac{2 m n r}{(m+n)(n+r)(r+m)}.$$

Pour satisfaire aux conditions du lieu il faut que

$$\frac{2 m n r}{(m+n)(n+r)(r+m)} = -2$$

ou

$$(m+n+r)(mn+nr+rm) = 0.$$

Donc, l'ellipse de STEINER $mn+nr+rm=0$ avec la droite à l'infini $m+n+r=0$ constituent le lieu.

Neue Aufgaben

255. Ein Faden der Länge L wird in zwei Teile zerschnitten. Aus den Teilstücken werden zwei Kurven \bar{C}_i ($i = 1, 2$) gebildet, die zu den ebenen doppelpunktfreien geschlossenen Kurven C_i mit dem Umfang U_i und dem Flächeninhalt F_i ähnlich sind. Wie lang sind die beiden Teilstücke, wenn die Summe der Flächeninhalte von \bar{C}_1 und \bar{C}_2 minimal sein soll? R. ROSE, Saarbrücken.

256. Man zeige, dass für die reellen Wurzeln des Systems

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 49 \\ (x-11)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 49 \\ 19x - 28y - 6,5z = 0 \end{cases}$$

gilt:

$$x_1 + x_2 = 16; \quad y_1 + y_2 = 9; \quad z_1 + z_2 = 8.$$

W. LÜSSY, Winterthur.

257. Gegeben sei eine reelle Zahl $\alpha > 1$, eine Folge nichtnegativer Zahlen p_n , $n = 1, 2, \dots$, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ divergiert, und das System der Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu x_\nu^\alpha \leq x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

mit nichtnegativen x_v als Unbekannten. Wenn alle x_v verschwinden, sind sämtliche Ungleichungen erfüllt; dies ist die triviale Lösung des Systems. Gibt es noch andere Lösungen?
A. PFLUGER, Zürich.

258. Von einer rationalen, bizirkularen Quartik q mit dem Doppelpunkt D kennt man eine der beiden (als reell vorausgesetzten) Doppelpunkt tangente sowie die beiden restlichen aus D an q legbaren Tangente t_1, t_2 samt ihren Berührungspunkten T_1, T_2 . Man konstruiere die Quartik, wenn t_1, t_2 ebenfalls reell sind.

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien.

259. Soit π un plan quelconque. O et P deux points de l'espace, a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) les projections de \overline{OP} sur les côtés d'un polygone régulier situé dans π . Alors l'expression $(1/n) \sum_1^n a_k^2$, c'est-à-dire le moyen des carrés des projections de \overline{OP} sur les côtés du polygone a la même valeur pour tous les polygones réguliers du plan.

H. BREMEKAMP, Delft.

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

44. Jahresversammlung in Pruntrut

S. PICCARD (Neuchâtel): *Les systèmes fixes d'éléments générateurs d'un groupe*

S. PICCARD (Neuchâtel): *Quelques problèmes de la théorie des groupes*

H. MEIER-WUNDERLI (Zürich): *Aus der Theorie der Abelschen Gruppen*

M. KERVAIRE (Bern): *Homotopie et courbure intégrale généralisée*

G. VINCENT (Lausanne): *Sur les représentations linéaires de certains groupes finis*

S. PICCARD (Neuchâtel): *Sur des ensembles parfaits*

Literaturüberschau

Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Band 1

Herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. 531 Seiten. Birkhäuser Verlag, Basel 1955

Der hiermit vorliegende erste Band des Briefwechsels von JOHANN BERNOULLI bedeutet den Anfang eines grossen Unternehmens: der Herausgabe des Briefwechsels und der gesamten Werke der Mathematiker BERNOULLI. Über die Vorgeschichte und den Umfang dieser Aufgabe gibt der Herausgeber, Prof. O. SPIESS, ausführlich Auskunft. Es besteht die Absicht, acht Träger des Namens BERNOULLI sowie JAKOB HERRMANN einzubeziehen, was insgesamt 20 bis 25 Bände von je etwa 700 Seiten erfordern würde.

Der Band enthält zunächst die wenigen Briefe, die vom Briefwechsel zwischen JOHANN und JAKOB BERNOULLI übriggeblieben sind. Das Kernstück bildet der Briefwechsel zwischen JOHANN und dem Marquis DE L'HÔPITAL, der bekanntlich das erste Lehrbuch der Differentialrechnung verfasst hat, das zur Hauptsache auf den Unterrichtsnotizen JOHANN BERNOULLIS beruht. Anschliessend folgen Briefe von und an verschiedene Personen, in denen indessen selten mathematische Fragen erörtert werden. In den vorliegenden Band sind nur Briefe aufgenommen, die vor dem Tode JAKOB BERNOULLIS (16. 8. 1705) geschrieben wurden. Im Anhang findet sich ein chronologisches Verzeichnis der Briefe, ein Schriftenverzeichnis der wichtigsten im Briefwechsel genannten Autoren, ein besonderes Verzeichnis der behandelten mathematischen Probleme, ein Sach- und Namenverzeichnis. Der Herausgeber schickt den einzelnen Teilen des Briefwechsels eine Einleitung voraus und begleitet jeden Brief mit eingehenden Erläuterungen.

Der Briefwechsel gewährt uns einen spannenden Einblick in die Entfaltung der Infinitesimalrechnung; die handelnden Personen, insbesondere JOHANN BERNOULLI und der Marquis DE L'HÔPITAL, erstehen aus den Briefen höchst lebendig und mit allen ihren Vorzügen und Schwächen. Der Verlag hat den Band in jeder Hinsicht hervorragend ausgestattet.

Arthur Linder.