Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 10 (1955)
Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Ungelöste Probleme

Nr. 3. Herr W. Süss (Freiburg i. Br.) lenkt gelegentlich wieder die Aufmerksamkeit auf eine reizvolle Frage der Geometrie der Eilinien, die bereits im Jahre 1918 von W. Blaschke und andern aufgestellt wurde, bis heute aber unbeantwortet blieb. Das Problem lautet: Gibt es eine Eilinie in der Ebene, welche zwei Speichenpunkte aufzuweisen hat? Ein Punkt im Innern einer Eilinie heisst Speichenpunkt, wenn alle durchlaufenden Sehnen gleiche Länge haben.

Bemerkenswerterweise kennt man eine ganze Reihe von Eigenschaften einer solchen Eilinie, die von W. Süss [Tôhoku Math. J. *25*, 86–98 (1925)] aufgestellt worden sind. Eine Note von G. A. Dirac [J. London Math. Soc. *27*, 429–437 (1952)] aus neuerer Zeit befasst sich auch mit diesen Eigenschaften. Nur weiss man nicht, ob eine solche Eilinie überhaupt existiert! H. Hadwiger, Bern.

Aufgaben

Aufgabe 195. Man beweise: Rollt eine Gerade eines starren ebenen Systems Σ auf einer festen Zykloide, so existiert in Σ ein Strahlenbüschel, dessen Geraden im Ablauf der Bewegung ähnliche Zykloiden umhüllen. R. Bereis, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Dreht sich eine Ebene Σ_1 um einen ihrer Punkte O mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit α, eine komplanare Ebene Σ_2 um einen Punkt A ($OA = a$) von Σ_1 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit β (gegenüber einem ruhend gedachten System Σ_0), so beschreibt bekanntlich jeder Punkt von Σ_2 im ruhenden System Σ_0 eine Trochoide. Die Polkurven dieser Bewegung Σ_2 gegen Σ_0 sind Kreise mit den Radien

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \frac{\beta-\alpha}{\beta}\,a \qquad \text{(Fixkreisradius)},\\ r &= \frac{\alpha}{\beta}\,a \qquad \text{(Rollkreisradius)}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Jeder Punkt des Gangkreises k durchläuft eine Zykloide, deren Spitzen auf dem Rastkreis k_0 liegen.

Da ferner Bahntangente t und Bahnnormale n eines beliebigen Punktes B von k stets durch zwei feste Punkte P und Q von Σ_1 hindurchgehen – P und Q liegen auf dem Verbindungssteg OA; P übernimmt dabei die Rolle des jeweiligen Momentanpoles der Bewegung von Σ_2 gegen Σ_0 –, so führt das durch t und n aufgespannte System Σ_3 gegen Σ_2 eine Drehung um B und gegen Σ_1 eine umgekehrte Ellipsenbewegung aus. Die Bewegung von Σ_3 gegen Σ_0 kann auch durch Abrollen von n auf der Evolute e der Bahnzykloide z von B hervorgerufen werden. Dieses Abrollen vollzieht sich, wie aus den bestehenden Winkelrelationen zu ersehen ist, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{2}$$

Da die Gerade t stets die Zykloide z berührt, eine Verschiebung von t in sich während der Bewegung von Σ_3 auf ihre Hüllbahn ohne Einfluss ist, ferner t immer den in Σ_1 festen Punkt Q trägt und sich gegen Σ_0 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit γ dreht, so ist damit zunächst der bekannte Satz bewiesen: