Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 2

PDF erstellt am: **09.08.2024**

normalen Durchmessers von $\bar{\varkappa}$. s_1 sei die Richtung von H nach F_1 (in Pfeilrichtung orientiert!) und ν_1 die dazu normale Ebene durch U^s. $\bar{\varkappa}$ hat für die Sehstrahlrichtung s_1 den scheinbaren Umriss u^s in π, der wahre Umriss liegt in ν_1. Durch A^s und B^s werden die zu s_1 parallelen Geraden gelegt und mit der in Richtung s_1 sichtbaren Hälfte von $\bar{\varkappa}$ in $\bar{A}$ und $\bar{B}$ geschnitten. Der durch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ gelegte Grosskreis von $\bar{\varkappa}$ liefert bei Projektion in Richtung s_1 eine Ellipse in π, die durch A^s und B^s geht und u^s in diametralen Puknten berührt, wobei A^s und B^s von den Berührungspunkten nicht getrennt werden. Diese Ellipse ist nach Hilfssatz 2 eindeutig bestimmt und ist daher mit c^s identisch. c^s und der Grosskreis durch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind durch die Sehstrahlen affin aufeinander bezogen, und da A^s und B^s Endpunkte konjugierter Durchmesser von c^s sind, sind $U^s\bar{A}$ und $U^s\bar{B}$ zwei zueinander normale Radien von $\bar{\varkappa}$ [1]).

Diese mit c^s durchgeführte Konstruktion lässt sich für a^s und b^s wiederholen. Man erhält so zur Sehstrahlrichtung s_1 drei Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ auf $\bar{\varkappa}$, die mit U^s ein räumliches orthogonales Dreibein bilden. Daher ist $\bar{\varkappa}$ eine mögliche Lage der gesuchten Einheitskugel und U^s, $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ eine mögliche Lage des gesuchten räumlichen Dreibeins $UABC$. Andere Lagen gehen daraus durch Parallelverschiebung in Richtung s_1 hervor. Dreht man diese Dreibeine um die Nebenachse von u^s, bis s_1 in die Richtung $s_2 \| [HF_2]$ gelangt, so erhält man die zur Sehstrahlrichtung s_2 gehörigen Dreibeine. Sie sind mit den früheren gleichsinnig kongruent. Als Länge der Einheitsstrecke im Raum ergibt sich beide Male die Länge der halben Nebenachse von u^s.

Ist statt U die Gegenecke von U unsichtbar (Untersicht statt Obersicht), so ergeben sich zur Sehstrahlrichtung s_1 Achsenkreuze, die zu den vorher gefundenen bezüglich ν_1 spiegelbildlich liegen; analog für s_2.

In gleicher Weise lässt sich der Satz von Pohlke in dem (praktisch uninteressanten) Sonderfall beweisen, dass zum Beispiel U^s, B^s, C^s auf einer Geraden liegen. A^s liegt dann auf u^s, $\bar{A}$ in ν_1 bzw. ν_2; die Projektion des Grosskreises durch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ berührt u^s in A^s und im diametralen Punkt und geht durch B^s, sie ist daher c^s.

Fritz Hohenberg, Graz.

Ungelöste Probleme

Nr. 4. Unter der Länge eines konvexen Rotationskörpers verstehen wir die Ausdehnung des Körpers in Richtung der Achse, also den Abstand der beiden auf der Achse liegenden Pole.

Herr H. Bieri (Bern) hat verschiedene Extremalprobleme gelöst, die sich auf derartige Rotationskörper mit fest vorgeschriebener Länge beziehen. Bis heute offengeblieben sind aber beispielsweise die beiden folgenden Fragen: Welcher konvexe Rotationskörper vorgeschriebener Länge hat bei gegebenem Integral der mittleren

[1]) Man könnte auch auf Hilfssatz 2 verzichten und so schliessen: Durch u^s geht ein Sehstrahlenzylinder ζ_u, der $\varkappa$ längs eines Kreises k in ν_1 berührt; durch c^s geht ein Sehstrahlenzylinder ζ_c, der ζ_u längs zweier Erzeugenden berührt. ζ_c berührt $\varkappa$ in den beiden Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit k, daher zerfällt die Schnittkurve von ζ_c mit $\varkappa$ in zwei Kreise auf $\varkappa$. c sei einer dieser Kreise, A und B seien die Schnittpunkte von c mit den Sehstrahlen durch A^s und B^s. Die ebenen Schnitte c und c^s von ζ_u sind affin aufeinander bezogen, daher sind A und B Endpunkte zueinander normaler Durchmesser von c.

Krümmung: a) kleinste Oberfläche? b) grösste Oberfläche? Wegen einer Vermutung zu a) vgl. H. BIERI: *Ein (M, F)-Problem mit Nebenbedingung*, Experientia *9*, H. 6, 207 (Basel 1953).

H. HADWIGER, Bern.

Berichtigung. In Nr. 2 der Rubrik «Ungelöste Probleme» [El. Math. *9*, Nr. 6, 134 (1954)] muss der Ausdruck für D_3 natürlich

$$D_3 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} = 0{,}8880\ldots$$

heissen. (*Red.*)

Aufgaben

Aufgabe 200. Zeige, dass das Volumen $V_n(d)$ einer Kugel in n Dimensionen und mit einem Durchmesser d gegeben ist durch

$$V_n(d) = \frac{d^n}{\Gamma^*(n+1)} \quad \text{wo} \quad \Gamma^*(n+1) = \prod_{k=2,4,6,\ldots} \left\{ \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{1+\frac{n}{k}} \right\}.$$

[Wird das Produkt für $\Gamma^*(n+1)$ über *alle* natürlichen k erstreckt, so ergibt sich die bekannte Eulersche Formel für die Gamma-Funktion $\Gamma(n+1)$]. B. VAN DER POL, Genf.

Lösung: Es genügt, die Behauptung für die Einheitskugel zu beweisen. Der Schnitt einer n-dimensionalen Einheitskugel mit einer Hyperebene im Abstand $\cos\alpha$ vom Mittelpunkt ist eine $(n-1)$-dimensionale Kugel vom Radius $\sin\alpha$. Daraus folgt die Rekursionsformel

$$V_n = \int_0^\pi V_{n-1} \sin^n\alpha \, d\alpha = J_n V_{n-1} \quad \text{mit} \quad J_n = \int_0^\pi \sin^n\alpha \, d\alpha.$$

Sie gilt, wenn man $V_0 = 1$ setzt, auch noch für $n = 1$. Also ist $V_n = J_1 J_2 \cdots J_n$.

Durch partielle Integration ergibt sich

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}, \tag{1}$$

und daraus folgt

$$\frac{V_n}{V_{n-2}} = J_n J_{n-1} = \frac{n-1}{n} J_{n-1} J_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n} J_1 J_0 = \frac{2\pi}{n}.$$

Nach (1) ist

$$\lim_{m\to\infty} \frac{J_{m-1}}{J_m} = 1$$

und daher

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{J_0}{J_1} = \frac{4}{n} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{N\to\infty} \frac{4}{n} \left[\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2 \right] (2N+1).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{n} = \left[\prod_{k=1}^{N} \frac{n+2k}{n-2+2k} \right] \frac{1}{n+2N};$$