Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

La formule (2) intervient, par exemple, dans le calcul de l'intégrale définie

$$J = \int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos t}}\,.$$

En effet ($a\,b \neq 0$)

$$J = \frac{|a+b| - |a-b|}{a\,b} = \frac{2}{\max(|a|,|b|)}\,.$$

D. S. Mitrinovitch, Belgrad.

Ungelöste Probleme

Nr. 5. Das Problem der Quadratur des Kreises im mengengeometrischen Sinn ist immer noch ungelöst! Es handelt sich um die Frage, ob ein abgeschlossener Kreisbereich mit einem flächengleichen abgeschlossenen quadratischen Bereich der Ebene im Sinne der Mengengeometrie zerlegungsgleich ist? Kann man den Kreis so in endlich viele disjunkte Punktmengen zerlegen, dass sich aus den gleichen in der Ebene passend bewegten Punktmengen wieder das Quadrat zusammensetzen lässt?

Vermutlich ist dies nicht möglich; doch gibt es in der Mengengeometrie und in der Theorie der Punktmengenfunktionen bis heute keinen Begriff, der geeignet wäre, zur Klärung dieser Frage herangezogen zu werden.

Die Frage wurde wiederholt von W. Sierpiński aufgestellt[1]).

Eine gewisse Merkwürdigkeit liegt darin, dass die Dimension $k = 2$ vermutlich die einzige Raumdimension ist, für welche die analog verallgemeinerte Frage negativ beantwortet werden muss. Für $k \neq 2$ ist nämlich eine Kugel stets mit einem inhaltsgleichen Würfel zerlegungsgleich!

Für $k = 1$ ist die Behauptung trivial und für $k \geqq 3$ eine Folge der bekannten «Zerlegungsparadoxie» von S. Banach und A. Tarski[2]).

Es dürfte wohl leichter sein, zu beweisen, dass Kreis und Quadrat nicht translativzerlegungsgleich sind; in diesem Fall sollen die Teilmengen in der Ebene nur verschoben, aber nicht gedreht werden. Unseres Wissens gibt es auch hier noch keine Handhabe, Fragen dieser Art zu entscheiden. H. Hadwiger.

Aufgaben

Aufgabe 205. Man zeige: a) Alle Kegelstümpfe, die in der Höhe und in der Länge der erzeugenden «Meridiankurve» (Mantellinie + Radien der begrenzenden Kreise) übereinstimmen, haben dieselbe Gesamtoberfläche. b) Es gibt genau einen nichttrivialen Zylinder der Höhe h und einen symmetrischen Doppelkegel der Höhe h, welche in der Gesamtoberfläche und im Flächeninhalt eines Achsenschnittes übereinstimmen.

H. Bieri, Bern.

[1]) Vergleiche: *Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points*, El. Math. *5*, 1–4 (1950).

[2]) *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. *6*, 244–277 (1924).