

# Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 4

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  auf die drei Koordinatenebenen drei Gerade  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$  erfüllen, die im Bild parallel zu  $z^s$ ,  $x^s$ ,  $y^s$  erscheinen. Der Ort der Punkte  $P$  ist mithin eine Raumgerade  $p$  von ganz bestimmter Richtung. Denkt man sich nun den abzubildenden Gegenstand  $G$  zunächst in der Richtung  $p$  auf die  $(yz)$ -Ebene projiziert, so entsteht hier ein *Schrägriß*  $G_1$ , dessen axonometrisches Bild  $G_1^s$  sich mit dem Bild  $G^s$  des Gegenstandes deckt. Da zwischen  $G_1$  und  $G_1^s$  Affinität besteht, so ist damit bewiesen, dass das *axonometrische Bild  $G^s$  des Gegenstandes zu seinem Schrägriß  $G_1$  affin* ist.

Damit ist ein hinreichender Einblick in das Wesen des axonometrischen Bildes gewonnen, der die Gesetze der Parallelprojektion, soweit sie affiner Natur sind – und nur auf diese kommt es tatsächlich an – anzuwenden gestattet. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint es kaum begreiflich, dass dem (an sich natürlich interessanten) Pohlkeschen Lehrsatz, der ja einen ausgesprochen metrischen Inhalt hat, bislang eine so fundamentale Bedeutung für die Axonometrie beigemessen wurde. Eine bewusste Abkehr von dieser Tradition ist anscheinend erstmalig in dem ausgezeichneten Werk von E. STIEFEL vollzogen worden, das im wesentlichen ebenfalls die hier dargelegte Auffassung vertritt<sup>1)</sup>. Im übrigen steht auch F. HOHENBERG im Grunde genommen auf dem gleichen Standpunkt, wie schon die Einleitung seines Aufsatzes andeutet; einer persönlichen Mitteilung zufolge legt sein im Druck befindliches Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* bei der Behandlung der schiefen Axonometrie zunächst besonderes Gewicht auf die affinen Eigenschaften der Abbildung und bringt den Pohlke-Satz erst als abschliessende Ergänzung. W. WUNDERLICH, Wien.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 6.** P. ERDÖS schilderte kürzlich (Besuch in der Schweiz im November 1954) verschiedene Fragen der kombinatorischen Geometrie, beispielsweise die folgende: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl  $N_k(n)$  ( $n \geq 2$ ;  $k \geq 1$ ), so dass die Aussage richtig ist: «Der Durchmesser einer aus  $n$  Punkten bestehenden Menge  $A$  des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes wird höchstens durch  $N_k(n)$  verschiedene Punktepaare von  $A$  realisiert.» Wie gross ist  $N_k(n)$ ?

Unter dem Durchmesser einer beschränkten Punktmenge versteht man bekanntlich die obere Schranke der Distanzen, welche durch Punktepaare der Menge repräsentiert werden. Ist die Punktmenge endlich, so gibt es wenigstens ein Punktepaar, das den Durchmesser der Menge realisiert.

Trivialerweise gilt  $N_1(n) = 1$ ; weiter ist  $N_2(n) = n^2$ . Nach einer von VÁZSONYI stammenden Vermutung ist  $N_3(n) = 2n - 2^3$ .

Vermutlich gilt  $N_k(n) < n(k+1)/2$ ; hieraus würde sich die Richtigkeit einer Vermutung von K. BORSUK (vgl. Problem Nr. 2) für endliche Punktmenge ergeben. Mit einfachem Schubfachschluss würde sich aus der angegebenen Schätzung folgern lassen, dass sich  $A$  in  $k+1$  Teilmengen so zerlegen lässt, dass der Durchmesser von  $A$  in keiner Teilmenge angenommen wird.

H. HADWIGER.

<sup>1)</sup> E. STIEFEL, *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947), insbesondere S. 133.

<sup>2)</sup> Vgl. Jahresbericht D. M. V. 43, 114 (1934).

<sup>3)</sup> P. ERDÖS, *On Sets of Distances of  $n$  Points*, Amer. Math. Monthly 53, 248–250 (1946).

Nachtrag zu Nr. 2: Kürzlich ist es H. G. EGGLESTON [*Covering a Three Dimensional Set with Sets of Smaller Diameter*, J. London Math. Soc. 30, 11–24 (1955)] gelungen, die Aussage  $D_3 < 1$  zu beweisen. Damit ist die Richtigkeit der Borsukschen Vermutung auch für den dreidimensionalen Raum bestätigt.

## Aufgaben

**Aufgabe 211.** Ein quadratisches Papier werde so gefaltet, dass eine Ecke auf eine der beiden nicht von dieser Ecke ausgehenden Seiten zu liegen kommt. Durch das Falten entstehen drei « überschüssende » Dreiecke. Die Summe dieser Dreiecke soll zu einem Maximum gemacht werden. Wo liegt die abgebogene Ecke, und wieviel Prozent der Gesamtfläche machen die überschüssenden Flächen aus? E. ROTHMUND, Zürich.

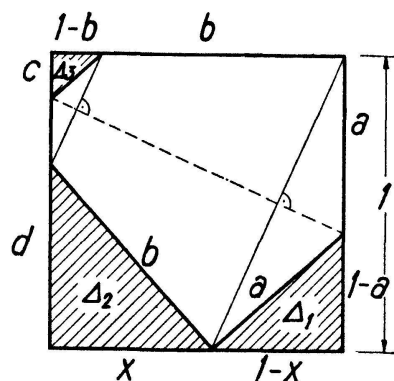
*Lösung:* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Aufgabe am Einheitsquadrat lösen.

Aus der untenstehenden Figur folgt die Ähnlichkeit der drei Dreiecke; es gilt daher

$$\frac{1-a}{1-x} = \frac{x}{d} = \frac{c}{1-b}. \quad (1)$$

Die Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  bestimmen sich dann nacheinander zu

$$a = 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$



Ferner mit Hilfe von (1):

$$d = x \frac{1-x}{1-a} = \frac{2(1-x)}{2-x},$$

und ebenso mittels der Ähnlichkeit

$$b = \frac{a d}{1-x} = \frac{2-2x+x^2}{2-x}$$

sowie mit (1):

$$c = \frac{x}{d} (1-b) = \frac{x^2}{2}.$$

Damit haben wir die einzelnen Dreiecksinhalte

$$\Delta_1 = \frac{1-a}{2} (1-x) = \frac{(2-x)x(1-x)}{4},$$

$$\Delta_2 = \frac{d}{2} x = \frac{(1-x)x}{2-x},$$

$$\Delta_3 = \frac{c}{2} (1-b) = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x-x^2}{2-x}.$$

Für die Summe der « überschüssenden » Dreiecke gilt dann

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^3 \Delta_i = (1-x)x \frac{x^2 - 2x + 4}{2(2-x)}. \quad (2)$$

Es soll nun (2) für  $x \in [0, 1]$  zu einem relativen Maximum gemacht werden.