

Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wie bekannt, gibt es

- 45 Pascalsche Punkte,
- 60 Pascalsche Geraden,
- 60 Kirkmansche Punkte,
- 20 Steinersche Punkte,
- 15 Steinersche Geraden,
- 20 Cayleysche Geraden,
- 15 Salmonsche Punkte.

Die in Betracht kommenden Konfigurationen sind:

60 Pascalsche Geraden und 45 Pascalsche Punkte ergeben die Konfiguration $(60_3, 45_4)$.

60 Pascalsche Geraden und 60 Kirkmansche Punkte ergeben die Konfiguration $(60_3, 60_3)$.

Diese besteht aus 6 Desarguesschen $(10_3, 10_3)$.

15 Steinersche Geraden und 20 Steinersche Punkte ergeben die Konfiguration $(15_4, 20_3)$.

20 Cayleysche Geraden und 15 Salmonsche Punkte ergeben die Konfiguration $(20_3, 15_4)$.

15 Steinersche + 20 Cayleysche Geraden und 20 Steinersche + 15 Salmonsche Punkte ergeben die Konfiguration $(35_4, 35_4)$.

60 Pascalsche + 20 Cayleysche Geraden und 60 Kirkmansche + 20 Steinersche Punkte ergeben die Konfiguration $(80_4, 80_4)$.

Die beiden Figuren enthalten:

	innerhalb des Kreises	ausserhalb des Kreises	
Pascalsche Punkte	15	25	5 ausserhalb der Figur
Pascalsche Geraden	60		
Kirkmansche Punkte	28	30	2 ausserhalb der Figur
Steinersche Punkte	10	9	1 ausserhalb der Figur
Steinersche Geraden	3	3	Rest nicht gezeichnet
Cayleysche Geraden	–	5	Rest nicht gezeichnet
Salmonsche Punkte	–	1	Rest nicht gezeichnet

Um die Figuren nicht zu überlasten, ist eine grössere Zahl von Punkten und Geraden weggelassen. Die Anordnung der in Figur 1 unten gezeichneten Punkte und Geraden ist selbstverständlich nur schematisch zu verstehen.

Man kann die Pascalsche Konfiguration auch für das regelmässige Sechseck zeichnen. Dabei sind 6 Pascalsche Geraden unendlich fern und 3mal je 4 fallen zusammen, so dass man nur 45 dieser Geraden zeichnen kann. 18 Kirkmansche Punkte sind unendlich fern, während 6 in den Mittelpunkt des Kreises fallen.

Einen weiteren Spezialfall erhält man, wenn der Kegelschnitt in zwei Geraden zerfällt. K. WANKA, Wien.

Ungelöste Probleme

Nr. 8. Anlässlich eines Vortrages im Mathematischen Kolloquium Winterthur im Sommer 1947 erörterte H. HOPF¹⁾ verschiedene Sätze über stetige Funktionen auf der Kugelfläche. Es zeigt sich, dass verschiedene ältere und neuere Aussagen dieser Art mit einem zentralen Satz in engste Beziehung gebracht werden können, der auch vom erwähnten Referenten als eventuell gültig gestreift wurde, dessen Nachweis aber

¹⁾ El. Math. 2, 119–120 (1947).

unseres Wissens bis heute noch nicht glückte. In einigen wichtigen Sonderfällen ist seine Richtigkeit dagegen festgestellt worden. Es handelt sich um den folgenden Satz: *Bezeichnet $f(P)$ eine stetige Funktion der Punkte P der Kugelfläche S , und ist $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$ ein beliebig vorgegebenes sphärisches Dreieck auf S mit den Eckpunkten A_0, B_0 und C_0 , so gibt es auf S ein Dreieck $\langle A, B, C \rangle$, das mit dem vorgegebenen Dreieck kongruent ist, so dass die Funktion in seinen Eckpunkten gleiche Werte annimmt, so dass also $f(A) = f(B) = f(C)$ wird.*

Wir erwähnen wichtige geklärte Sonderfälle und Korollarien:

aa) Der Satz ist richtig, wenn das Dreieck gleichseitig ist; dies wurde von A. DE MIRA FERNANDES¹⁾ gezeigt.

ab) Der Satz ist insbesondere richtig, wenn das Dreieck gleichseitig und rechtwinklig ist. Dieser noch speziellere, aber wichtige «orthogonale» Fall wurde etwas früher von S. KAKUTANI²⁾ erledigt. Eine stetige Richtungsfunktion im Raum nimmt also für drei geeignete paarweise orthogonale Richtungen gleiche Werte an.

ac) Der Satz ist richtig, wenn das Dreieck in der Weise entartet ist, dass zwei seiner Eckpunkte ein antipodisches Paar bilden. Dies wiederum ist ein Korollar eines neueren Resultates von G. R. LIVESAY³⁾, das noch wesentlich mehr aussagt. Danach gibt es nämlich zwei antipodische Punktepaare mit beliebig vorgeschriebenem Zwischenwinkel der beiden Kugeldurchmesser, so dass die Funktion in allen vier Punkten denselben Wert annimmt. An die Stelle eines Dreiecks ist hier also ein beliebiges Rechteck getreten, das einem Grosskreis der Kugelfläche einbeschrieben ist. Auch hier wurde der «orthogonale» Fall früher durch F. J. DYSON⁴⁾ entdeckt. Danach gibt es also ein Grosskreisquadrat derart, dass die Funktion in allen vier Eckpunkten übereinstimmenden Wert aufweist.

Aussagen über stetige Funktionen der hier betrachteten Art sind als Hilfssätze bei mannigfaltigen geometrischen Beweisen ausserordentlich leistungsfähig. Hier einige zum Teil geläufige Anwendungen: ba) Einer stetig gekrümmten Eifläche lässt sich stets ein reguläres Tetraeder so einschreiben, dass einer der vier Eckpunkte mit einem beliebig vorgeschriebenen Eiflächenpunkt zusammenfällt. Zum Beweis konstruiert man die gerade stetige Richtungsfunktion $f(P) = s$, wo s die Länge der Eiflächensehne durch den vorgeschriebenen Punkt bezeichnet, welche parallel zum Kugeldurchmesser durch P gelegt ist. Nun wende man die Aussage aa) für ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $\pi/3$ an.

bb) Einem konvexen Körper lässt sich stets ein Würfel umschreiben. Um den Beweis zu führen, betrachte man die gerade stetige Richtungsfunktion $f(P) = b$, wo b die Breite des konvexen Körpers in der durch den Kugelpunkt P gekennzeichneten Richtung bedeutet. Dann wende man die Aussage ab) an. Die drei Stützebenenpaare in den drei Raumrichtungen gleicher Breite ergeben einen umschriebenen Würfel.

bc) Einer Eifläche lässt sich ein Quadrat so einbeschreiben, dass die Quadratmitte mit einem beliebig vorgeschriebenen, von der Eifläche umschlossenen Raumpunkt zusammenfällt. Hier betrachte man die stetige Richtungsfunktion $f(P) = h$, wo h die Länge der vom gewählten Raumpunkt im Innern der Eifläche in der Richtung P

¹⁾ Portugaliae Math. 4, 69–72 (1943).

²⁾ Ann. Math. 43, 739–741 (1942).

³⁾ Ann. Math. 59, 227–229 (1954).

⁴⁾ Ann. Math. 54, 534–536 (1951).

auslaufenden Halbsehne bezeichnet. Nun wende man die Aussage ac) im «orthogonalen» Fall an.

Erweiterungen der Sätze über stetige Richtungsfunktionen der hier besprochenen Art auf Räume höherer Dimensionen sind nur in einzelnen Fällen bekannt. So haben H. YAMABE und Z. YUJOCO¹⁾ das Theorem von S. KAKUTANI verallgemeinert. Danach nimmt eine stetige Richtungsfunktion des k -dimensionalen Raumes in k paarweise orthogonalen Richtungen den nämlichen Wert an. Hier stellt sich das Problem, alle Aussagen, die oben im Falle des gewöhnlichen Raumes erläutert worden sind, sinngemäss auf Räume beliebiger Dimension zu übertragen. H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 221. Alle vier Seitenflächen eines Tetraeders sollen gleichen Flächeninhalt haben. Man beweise, dass folgende drei Punkte zusammenfallen:

1. Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heisst der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel.
2. Der Mittelpunkt der Umkugel, das heisst der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel.
3. Der Schwerpunkt des Tetraeders.

F. GOLDNER, London.

Lösung: Zu einem beliebigen Dreieck als Grundfläche kann man direkt ein Tetraeder mit den vorausgesetzten und behaupteten Eigenschaften finden, indem man durch die Ecken des Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten zieht und die so entstehenden vier kongruenten Dreiecke als Netz des Tetraeders auffasst. Weil die Umkreise der Seitenflächen dieses Tetraeders kongruent sind, hat der Mittelpunkt der Umkugel von den Seitenflächen gleiche Abstände und fällt also mit dem Inkugelmittelpunkt zusammen. Der Abstand des Tetraederschwerpunktes von einer Seitenfläche ist gleich einem Viertel der zugehörigen Tetraederhöhe. Aus der Betrachtung des Volumens folgt, dass die Tetraederhöhen gleich lang sind, also fällt der Schwerpunkt in den Inkugelmittelpunkt.

Das angegebene Tetraeder ist aber auch das einzige mit flächengleichen Seitenflächen. Geometrische Örter für die Spitze des zum gegebenen Dreieck als Grundfläche gehörenden Tetraeders sind drei Kreiszyylinder, von denen jeder eine Dreiecksseite als Achse und die zugehörige Dreieckshöhe als Radius hat. Ihre Durchdringungen haben die Grundfläche zur Symmetrieebene und projizieren sich also darauf als drei Kurvenbögen zweiter Ordnung (Hyperbelbögen) eines durch vier Grundpunkte bestimmten Kegelschnittbüschels, indem jede Kurve durch die vier Schnittpunkte der beiden andern geht. Drei der Grundpunkte sind aber identisch mit den Ecken des erwähnten Netz-Dreiecks, die zugehörigen Zylinderschnittpunkte liegen in der Ebene der Grundfläche und ergeben keine eigentlichen Tetraeder. Es verbleibt der vierte Grundpunkt als Höhenfusspunkt des einzig möglichen Tetraeders.

Es sei noch bemerkt, dass die Höhe h sich in folgender Weise durch die Seiten a, b, c der Grundfläche ausdrückt:

$$h = \frac{2}{2\sqrt{2}F} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}, \quad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

G. BALASTÈR, Zürich.

Die Tatsache, dass die Seitenflächen des Tetraeders bei gleichem Flächeninhalt kongruent sind, woraus die behaupteten Eigenschaften wie oben unmittelbar folgen,

¹⁾ Osaka math. J. 2, 19-22 (1950).