Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 3

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Alle bisher bekannten Beispiele solcher Funktionen $f(x, y)$ haben aber, wie die überall stetigen Funktionen, die beiden folgenden Eigenschaften:

1. Sie sind in jedem abgeschlossenen Quadrat $|x|, |y| \leqq c$ beschränkt.
2. Sie nehmen in jedem abgeschlossenen Quadrat $|x|, |y| \leqq c$ ihre dortige untere Grenze $\inf f(x, y)$ und obere Grenze $\sup f(x, y)$ als Funktionswerte an.

Es dürfte daher die Bemerkung von Interesse sein, dass keine dieser beiden Eigenschaften für alle Funktionen der betrachteten Art gilt. Das soll durch zwei einfache, durch leichte Abänderung der Funktion (2) gebildete Beispiele belegt werden.

Zunächst ist die Funktion

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^4)^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad F(0, 0) = 0 \tag{3}$$

wieder im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Wegen

$$F(y^2, y) = \frac{1}{4y} \quad \text{für } y \neq 0$$

ist sie aber in keinem Quadrat $|x|, |y| \leqq c$ beschränkt.

Ebenfalls ist die Funktion

$$G(x, y) = \frac{x y^2}{(x^2 + y^4)(1 + x^2 + y^2)} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad G(0, 0) = 0 \tag{4}$$

im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Weiter gilt wegen

$$|G(x, y)| < \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \to 0} G(\pm y^2, y) = \pm \frac{1}{2}$$

in jedem abgeschlossenen Quadrat $|x|, |y| \leqq c$

$$-\frac{1}{2} = \inf G(x, y) < G(x, y) < \sup G(x, y) = \frac{1}{2};$$

die Funktion (4) nimmt also weder ihre untere noch ihre obere Grenze als Funktionswert an.

Heinz König, Würzburg.

Ungelöste Probleme

Nr. 11. Herr Martin Kneser machte bei verschiedenen Gelegenheiten auf ein Problem aufmerksam, das nach erstem Augenschein einen fast elementaren Charakter zu haben scheint, dessen Lösung aber, wie wir von verschiedener Seite vernehmen, noch nicht restlos glückte. Es handelt sich hierbei um folgendes: Es sollen $P_1, \ldots, P_n$; $Q_1, \ldots, Q_n$ $2n$ Punkte des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen, und für die Distanzen gelte $d(P_i, P_j) \leqq d(Q_i, Q_j)$ für jedes Indizespaar $1 \leqq i, j \leqq n$.

Bedeutet A bzw. B die Vereinigungsmenge der n Einheitskugeln mit den Mittelpunkten P_i $(i = 1, \ldots, n)$ bzw. Q_i $(i = 1, \ldots, n)$ und $V(A)$ bzw. $V(B)$ ihre Volumina, so gilt vermutlich $V(A) \leqq V(B)$.

Diese Aussage würde, falls sichergestellt, innerhalb der Masstheorie nützliche Dienste als Hilfssatz leisten.

Beispielsweise würde sich mühelos folgern lassen, dass das untere Minkowskische Mass einer beliebigen beschränkten Punktmenge sich bei dehnungsloser Abbildung nicht vergrössern kann und damit mindestens so gross ist wie das Kolmogoroffsche Minimalmass. Darüber kann man nachlesen bei M. KNESER in einer jüngst erschienenen Abhandlung[1]).

Die vermutete Aussage ist nur in einigen Sonderfällen bewiesen worden. 1. $k = 1$ (Beweis durch Induktion nach n). 2. $n \leqq k + 1$. 3. Die Menge der P_i ist ähnlich zur Menge der Q_i [Beweis von G. BOULIGAND[2])]. 4. $k = 2$; die Menge der P_i lässt sich stetig in die Menge der Q_i so überführen, dass die Distanzen entsprechender Punkte nie abnehmen (nach brieflicher Mitteilung von W. HABICHT an M. KNESER).

H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 232. Eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts schneide zwei feste Tangenten desselben in A und B. Über AB wird das Dreieck ABC errichtet, das zu einem festen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist. Gesucht wird der geometrische Ort für die Spitze C. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht, und J. P. SYDLER, Zürich.

Lösung: Die Ordnung der Ortskurve ist gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden in allgemeiner Lage. Es sei g eine solche und C ein Punkt auf ihr. Das Dreieck ABC, dessen Eckpunkte A und B auf den Tangenten t_1 bzw. t_2 des Kegelschnittes K liegen und das dem gegebenen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist, ist durch C eindeutig bestimmt. Denn die Drehstreckung aus C um den Dreieckswinkel γ im gegebenen Sinn mit dem Streckungsverhältnis $\lambda = \overline{BC}/\overline{AC}$ muss A in B überführen. B ist also der Schnittpunkt der Transformierten t_1' von t_1 mit t_2. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn $t_1' \parallel t_2$, das heisst, wenn $\sphericalangle (CA, CB)$ nach Grösse und Sinn dem Winkel (t_1, t_2) gleich ist. Bewegt sich C auf g, so verschiebt sich t_1' parallel und schneidet aus t_2 eine zu C ähnliche Punktreihe B aus. Dasselbe gilt für A. AB umhüllt also eine Parabel P, die t_1 und t_2 berührt. Ist K ein Mittelpunktskegelschnitt, so führen die beiden weiteren gemeinsamen Tangenten von K und P zu je einem Dreieck ABC, für welches AB Tangente von K ist. Der geometrische Ort von C ist also eine Kurve zweiter Ordnung, und zwar eine Hyperbel, da die beiden uneigentlichen Punkte reell sind.

Ist K eine Parabel, so hat diese mit P neben t_1, t_2 und der uneigentlichen Geraden nur *eine* gemeinsame Tangente, die zu einem Dreieck ABC mit C auf g führt; der geometrische Ort ist also eine Gerade.

Im oben erwähnten Ausnahmefall $t_1' \parallel t_2$ muss t_1' mit t_2 zusammenfallen, damit das Dreieck möglich wird. Das Verhältnis der Abstände des Punktes C von t_1 und t_2 muss dann nach Grösse und Vorzeichen einen bestimmten Wert λ haben; der geometrische Ort ist also eine Gerade durch den Schnittpunkt von t_1 und t_2.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitgehende Verallgemeinerungen dieser Resultate gibt J. P. SYDLER in seiner Arbeit: *Le triangle comme opérateur géométrique* (El. Math. *10*, 100–105 [1955]). Analytische Lösungen gaben C. BINDSCHEDLER und R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 233. D'un point M sur le diamètre AB d'une hyperbole équilatère on mène la tangente MT (A, B, T se trouvent sur la courbe). Démontrer

$$\frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

G. VLAHAVAS, London.

---

[1]) M. KNESER: *Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass*, Arch. Math. *6*, 382–390 (387) (1955).

[2]) G. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. Sci. Math. *52*, 320–344 (324) (1928).