Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 11 (1956)

Heft: 4

Artikel: Eine Anwendung der Theorie der komplexen Zahlen

Autor: Buchner, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18621

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XI Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1956

Eine Anwendung der Theorie der komplexen Zahlen

Die Theorie der Abbildung, vermittelt durch eine Funktion einer komplexen Veränderlichen,

$$w = f(z) = f(x + i\,y)$$

wird im Unterricht eben noch gestreift. Nach den Lehrmitteln des Vereins schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer[1]) werden die Funktionen

$$w = z + c, \quad w = a + b\,z \quad \text{und} \quad w = \frac{1}{z}$$

besprochen. Unser Beispiel bewegt sich ganz in diesem Anwendungsbereich und soll dem Schüler zeigen, wie die Theorie der komplexen Zahlen zur Lösung technischer Probleme verwendet werden kann.

1. Der Kreis k mit dem Zentrum $M(i)$ und dem Radius $r = \sqrt{2}$ soll durch die Funktion $w_1 = 1/z$ abgebildet werden (Figur 1). Da bei der Abbildung durch reziproke Radien Kreise wieder in Kreise übergehen, hat man von der Bildkurve k_1 nur drei Punkte zu ermitteln. Der Kreis k geht durch die Fixpunkte ± 1 der Abbildung. Für den Schnittpunkt S von k mit der Achse der imaginären Zahlen führt man entweder die im Leitfaden angegebene Konstruktion durch oder berechnet, dass $z = \left(1 + \sqrt{2}\right) i$ in $w_1 = 1/z = \left(1 - \sqrt{2}\right) i$ übergeht, den Schnittpunkt T von k mit der imaginären Achse. Bei der Abbildung geht der Kreis k als Ganzes, nicht aber punktweise, in sich über.

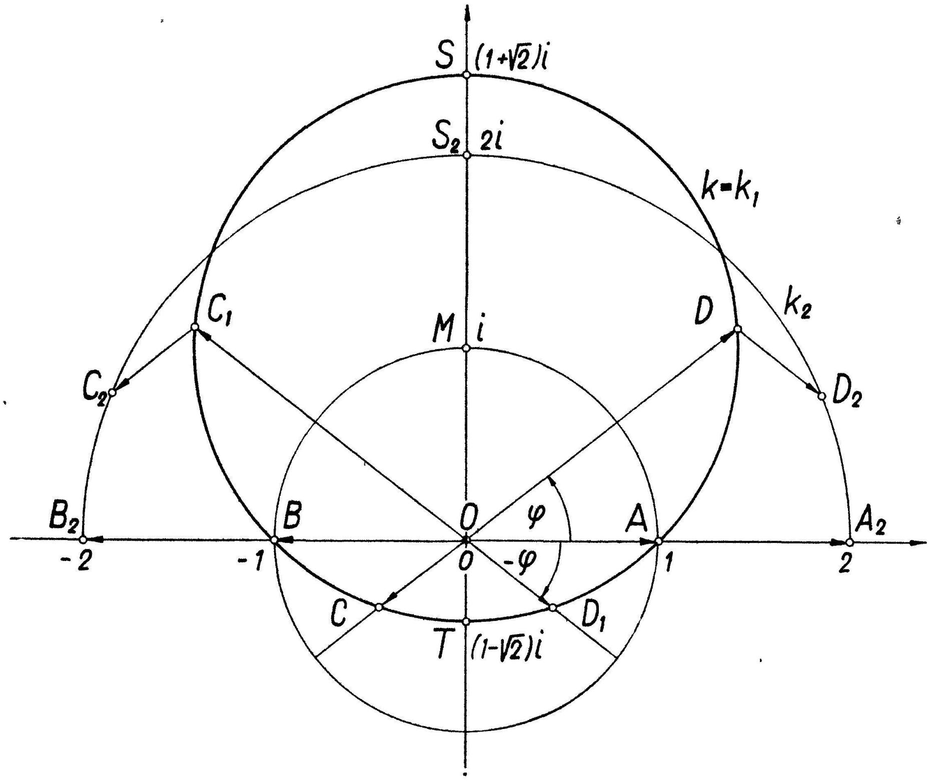
2. Jetzt bilden wir denselben Kreis k durch die Funktion

$$w_2 = z + \frac{1}{z} = z + w_1$$

ab. Der Punkt $A(1)$ geht nach $A_2(2)$ und $B(-1)$ nach $B_2(-2)$. Der Punkt $S\left(\left(1 + \sqrt{2}\right) i\right)$ geht durch w_1 nach $T\left(\left(1 - \sqrt{2}\right) i\right)$ und durch w_2, wegen $\left(1 + \sqrt{2}\right) i + \left(1 - \sqrt{2}\right) i = 2\,i$, nach $S_2(2\,i)$. Ebenso wird aber auch der Punkt T nach S_2 übergeführt. Für beliebige Punkte C und D auf k wurde die Konstruktion der Bildpunkte angegeben. C geht

[1]) P. Buchner, *Leitfaden der Algebra*, vierter Teil, 2. Aufl., und F. Stähli und F. Meyer, *Aufgabensammlung der Algebra*, vierter Teil (Orell Füssli Verlag, Zürich).

zunächst nach C_1 auf $k = k_1$, wobei der Winkel φ von C in $-\varphi$ übergeht. Jetzt sind noch die Vektoren, die zu den Punkten C und C_1 gehören, zu addieren, und man gelangt nach C_2. Der Kreis k wird durch die Funktion w_2 in den Halbkreis $A_2S_2B_2$ übergeführt, der zweimal durchlaufen wird. Unser Problem verlangt nicht, dass man von der zweiblätterigen Riemannschen Fläche w_2 spricht.

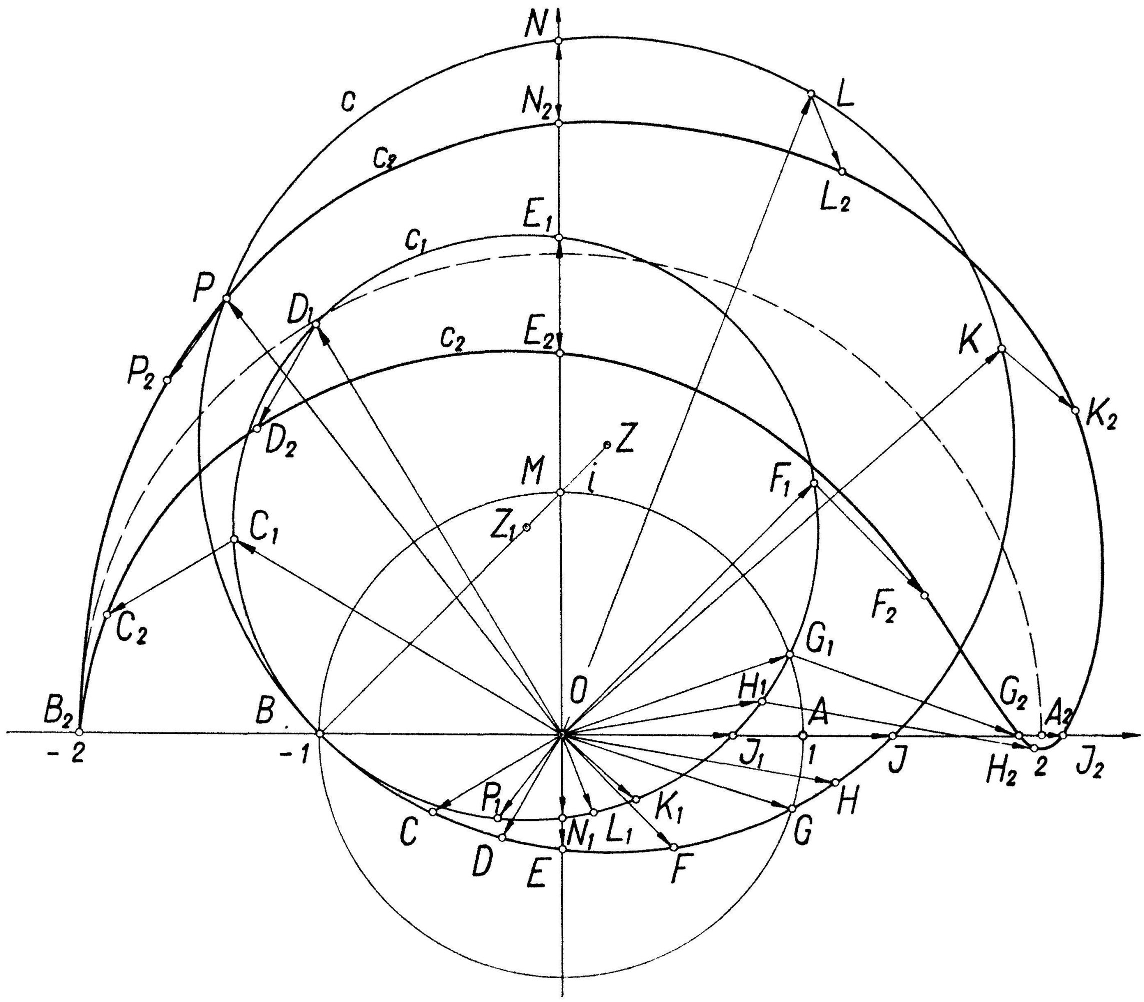


Figur 1

Als Resultat unserer Abbildung erhalten wir eine Kurve mit zwei Spitzen. Wir wollen nun die Abbildung so abändern, dass die Spitze bei B_2 bleibt, hingegen diejenige bei A_2 abgerundet wird.

3. Dazu bilden wir durch dieselbe Funktion w_2 einen Kreis c ab, der sich nur wenig von k unterscheidet. Er soll k im Punkte $B(-1)$ berühren, aber $A(1)$ im Innern enthalten. Sein Zentrum Z liegt auf der Geraden BM in der Nachbarschaft von M (Figur 2). Der Kreis c wird zunächst durch die Funktion $w_1 = 1/z$ in den Kreis c_1 verwandelt, dabei ist wiederum $B(-1)$ Fixpunkt. Da k und c sich in B berühren, liegt das Zentrum Z_1 von c_1 ebenfalls auf der Geraden BM. Die Punkte $C, D, E, \ldots$ auf c gelangen nach $C_1, D_1, E_1, \ldots$ auf c_1.

4. Nunmehr ist es einfach, die Bildkurve von c bei der Abbildung durch die Funktion $w_2 = z + 1/z$ zu konstruieren. Die Punktfolge $B, C, D, \ldots$ auf dem Kreis c geht durch $w_1 = 1/z$ in die Folge $B_1, C_1, D_1, \ldots$ auf dem Kreis c_1 über. Da der Kreis c_1 bereits bekannt ist, so ist zum Beispiel für die Konstruktion des dem Punkte C entsprechenden Punktes C_1 nur zu berücksichtigen, dass der Winkel φ der C zugeordneten komplexen Zahl in $-\varphi$ übergeht. Um C_2 auf der gesuchten Kurve c_2 zu erhalten, hat man lediglich noch die zu C und C_1 gehörenden Vektoren zu addieren. Der Kreis c wird dadurch in eine Kurve c_2 abgebildet, die in erster Näherung als das Profil eines Tragflügels betrachtet werden kann. Diese Abbildung ist zuerst von



Figur 2

JOUKOWSKI[2]) angegeben worden. In der Folge sind dann Verfahren entwickelt worden, die in der Theorie der Tragflügel wirklich verwendet werden können. Es ist leicht ersichtlich, dass durch diese konforme Abbildung w_2 auch die einfachen Strömungsverhältnisse um einen Kreis (Zylinder) abgebildet werden können in die sehr komplizierten Strömungsverhältnisse um einen Tragflügel, jedoch erscheint es uns nicht zweckmässig, auf diese einzugehen. P. BUCHNER, Basel.

Sur l'équation $\varphi(x) = m$

L'équation $\varphi(x) = m$, *où* m est un nombre naturel donné et $\varphi(x)$ est la fonction connue de EULER-GAUSS (qui exprime le nombre de nombres naturels $\leqq x$ et premiers avec x) a été étudiée par plusieurs auteurs. En particulier on a examiné combien de solutions peut admettre cette équation pour m donnés.

M. M. G. BEUMER a posé le problème de démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels pairs m pour lesquels l'équation $\varphi(x) = m$ n'a pas de solutions[1]).

[2]) N. JOUKOWSKI, *Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger*. Z. Flugtech. *1*, 281 (1910).

[1]) El. Math. *10*, 22 (1955), problème 230.