

# Sur les tétraèdres équivalents à un cube

Autor(en): **Sydler, J.-P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18623>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Donc, le nombre  $x$  n'est pas divisible par 4 et on a  $x = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$  où  $r$  est un nombre naturel,  $p_1, p_2, \dots, p_r$  sont des nombres premiers impairs distincts,  $\alpha \leq 1$  et  $\alpha_i \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). On a donc

$$\varphi(x) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \varphi(p_r^{\alpha_r}) = 12 \cdot 7^{12k+1}.$$

S'il était  $r \geq 3$ , on aurait  $8 \mid \varphi(x) = 12 \cdot 7^{12k+1}$ , ce qui est impossible. On a donc  $r \leq 2$ .

S'il était  $r = 2$  alors, les nombres  $\varphi(p_1^{\alpha_1})$  et  $\varphi(p_2^{\alpha_2})$  étant pairs, un d'eux, soit  $\varphi(p_1^{\alpha_1})$  serait égal à  $2 \cdot 7^l$ , où  $l$  est un entier  $\geq 0$ , d'où, d'après le corollaire 1,  $l = 0$  et  $p_1^{\alpha_1} = 3$ , donc  $\varphi(p_1^{\alpha_1}) = 2$  et  $\varphi(p_2^{\alpha_2}) = 6 \cdot 7^{12k+1}$  et, d'après le corollaire 2 on aurait  $p_2^{\alpha_2} = 7^{12k+2}$ , d'où  $x = 2^\alpha \cdot 3 \cdot 7^{12k+2}$ , contrairement à (3).

On a donc  $r = 1$  et  $\varphi(x) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) = 12 \cdot 7^{12k+1}$  et évidemment on a  $p_1 \neq 3$  et  $p_1 \neq 7$ , donc  $\alpha_1 = 1$  et  $p_1 - 1 = 12 \cdot 7^{12k+1}$ , d'où  $p_1 = 12 \cdot 7^{12k+1} + 1 > 5$ , ce qui est impossible, vu que le nombre  $12 \cdot 7^{12k+1} + 1$  est divisible par 5 (puisque  $7^4 = 5t + 1$  et  $12 \cdot 7 = 5u - 1$ ).

Nous avons ainsi démontré que l'équation  $\varphi(x) = m$  a précisément trois solutions. Le théorème 3 est ainsi démontré.

M. W. SIERPIŃSKI a exprimé l'hypothèse que, quel que soit le nombre naturel  $s > 1$ , il existe une infinité de nombres naturels  $m$  pour lesquels l'équation  $\varphi(x) = m$  a précisément  $s$  solutions. Or, nous ne savons pas démontrer même que pour tout nombre naturel  $s > 1$  il existe au moins un nombre naturel  $m$  tel que l'équation  $\varphi(x) = m$  a précisément  $s$  solutions.

Il est encore à remarquer que dans une communication présentée au Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague en 1955 j'ai démontré d'une façon tout-à-fait élémentaire que, quel que soit le nombre naturel  $s$ , il existe un nombre naturel  $m$  tel que l'équation  $\varphi(x) = m$  a plus que  $s$  solutions. Tel est, par exemple, le nombre  $m = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_s - 1)$ , où  $p_i$  désigne le  $i$ -ième nombre premier. (L'équation  $\varphi(x) = m$  est ici vérifiée par les nombres

$$x_0 = p_1 p_2 \cdots p_s \quad \text{et} \quad x_i = x_0 \frac{p_i - 1}{p_i},$$

où  $i = 1, 2, \dots, s$ .)

ANDRÉ SCHINZEL, Varsovie.

## Sur les tétraèdres équivalents à un cube

Rappelons que deux polyèdres sont dits équivalents lorsque l'on peut décomposer l'un en polyèdres partiels avec lesquels on peut construire l'autre. En 1900, HILBERT [1]<sup>1)</sup> posait la question qui donna essor à l'étude de l'équivalence: Existe-t-il un tétraèdre qui ne soit pas équivalent à un cube? Peu après, DEHN [2] établissait des conditions algébriques nécessaires pour que deux polyèdres soient équivalents, ce qui permettait de montrer que le tétraèdre régulier n'est pas équivalent à un cube. Dès lors, la question inverse gagnait en intérêt: Existe-t-il un tétraèdre qui soit équivalent à un cube?

<sup>1)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, p. 81.

Selon nous, il y a deux façons de procéder pour trouver de tels polyèdres. La première se base sur le lemme suivant [3]: On peut décomposer un polyèdre quelconque en un cube et en  $n$  polyèdres semblables au polyèdre initial. Par conséquent, si l'on peut décomposer un polyèdre équivalent à un cube en un certain nombre de

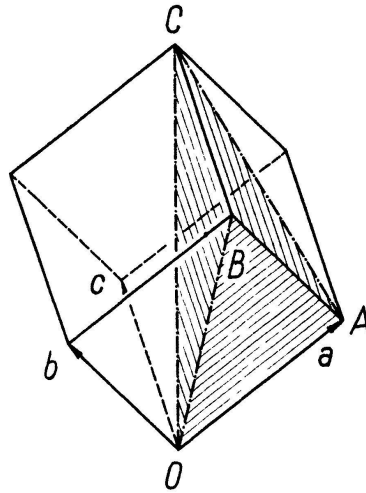


Figure 1

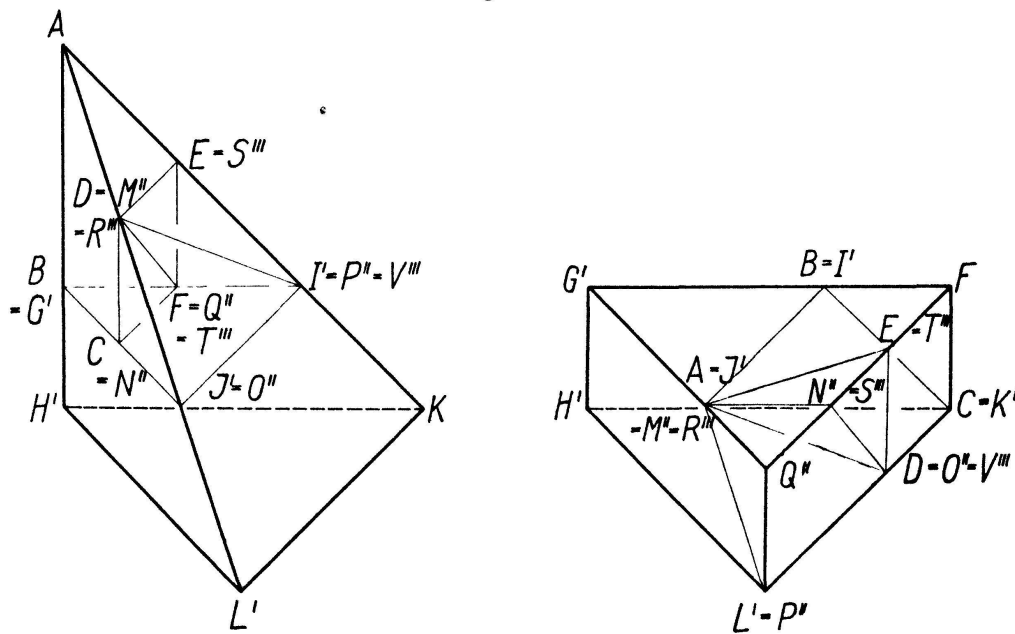


Figure 2

tétraèdres semblables entre eux, ces tétraèdres sont équivalents à un cube. Considérons par exemple un parallélépipède losangique: Soient  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  trois vecteurs de même longueur faisant entre eux des angles égaux; les huit points  $0, \vec{a} = \vec{OA}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{OC}$  déterminent le parallélépipède, équivalent à un cube comme tous les prismes. Les six plans menés par la diagonale principale  $OC$  et par chacun des sommets déterminent six tétraèdres semblables à  $OABC$ , qui sont donc équivalents à un cube (figure 1). On obtient ainsi une infinité de tétraèdres qui sont connus sous le nom de tétraèdres de HILL de première espèce. Soient  $M$  et  $N$  les

milieux de  $OC$  et de  $AB$ . Les tétraèdres  $OCNA$  et  $ABMO$  sont également équivalents à un cube et forment les tétraèdres de HILL de deuxième et troisième espèces. Ces tétraèdres, trouvés par HILL en 1896 [4] étaient les seuls tétraèdres équivalents à un cube qui nous soient connus.

Le plus répandu de ces tétraèdres est celui que l'on obtient en partant d'un cube. Dans ce cas,  $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$ ,  $OA \perp AB \perp BC \perp OA$ . Nous avons trouvé une décomposition de ce tétraèdre en 4 polyèdres partiels avec lesquels on peut construire un prisme. Nous l'indiquons à la figure 2 comme exemple d'un autre problème pour ainsi dire inabordable: Quel est le nombre minimum de polyèdres partiels nécessaires pour transformer l'un dans l'autre deux polyèdres équivalents?

La seconde façon de procéder pour trouver d'autres polyèdres équivalents à un cube est moins commode; elle consiste à chercher des tétraèdres qui vérifient les conditions nécessaires de DEHN et à trouver, éventuellement, une construction géométrique adéquate qui les transforme en un cube. Un excellent exemple en est donné par le problème irrésolu N° 9 que M. HADWIGER a proposé dernièrement [5]:

On porte sur les axes d'un système orthogonal les segments  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  de longueurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad a &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}; & b &= \sqrt[6]{18}; & c &= \sqrt[6]{18}; \\ 2^\circ \quad a &= \sqrt[3]{3(\sqrt{5}+2)}; & b &= \sqrt[3]{3(\sqrt{5}-2)}; & c &= \sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

Dans ces deux cas, tous les angles dièdres des tétraèdres  $OABC$  sont rationnels et vérifient les conditions de DEHN. Ces polyèdres sont-ils équivalents à un cube?

La proposition est effectivement vraie.

1° Considérons le tétraèdre  $OA'B'C'$  semblable à  $OABC$  obtenu en prenant  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{2}$ . Si  $M'$  désigne le milieu de  $B'C'$ , on voit que les tétraèdres  $A'OM'B'$  et  $A'OM'C'$  sont symétriques (donc équivalents) et que  $\overline{A'O} = \overline{OM'} = \overline{M'B'} = 1$ . Ces tétraèdres sont donc deux tétraèdres de HILL de première espèce.

2° Comme  $(\sqrt{5} \pm 1)^3 = 2^3(\sqrt{5} \pm 2)$ , on peut supposer  $a = \sqrt{5} + 1$ ,  $b = \sqrt{5} - 1$ ,  $c = 2$ . Les dièdres le long de  $AC$ ,  $CB$  et  $BA$  sont égaux à  $\pi/5$ ,  $2\pi/5$ ,  $\pi/3$ . Soit  $C'$  le symétrique de  $C$  par rapport au plan  $OAB$ . En assemblant le long de  $AB$  trois tétraèdres égaux à  $BACC'$ , on obtient un pentaèdre  $ABCC'C''$  que nous nommerons  $P$ .

a)  $\overline{BC} = \overline{BC'} = \overline{BC''}$ ;  $\overline{AC} = \overline{AC'} = \overline{AC''}$ ;  $\overline{CC'} = \overline{C'C''} = \overline{C''C}$ ;

b) Dièdres  $CC'$ ,  $C'C''$ ,  $C''C$ :  $\pi/2$ ; Dièdres  $AC$ ,  $AC'$ ,  $AC''$ :  $2\pi/5$ ;

Dièdres  $BC$ ,  $BC'$ ,  $BC''$ :  $4\pi/5$ .

Assemblons 5 polyèdres  $P$  autour de chaque arête  $AC$ ,  $AC'$ ,  $AC''$ . Le polyèdre formé par ces 10 pentaèdres  $P$  a, le long des arêtes issues de  $A$ , 6 dièdres alternativement égaux à  $4\pi/5$  et  $6\pi/5$ . En lui ajoutant son symétrique par rapport à  $A$ , on obtient alors un polyèdre convexe semi-régulier ayant 32 sommets, 60 arêtes de dièdres  $4\pi/5$  et 30 faces losangiques.

Ce polyèdre est équivalent à un cube. Il suffit en effet de considérer les prismes tronqués déterminés par les faces du polyèdre et leurs projections orthogonales sur

un plan quelconque; chacun de ces prismes tronqués est équivalent à un cube puisque les faces sont losangiques; leur somme (algébrique) l'est donc aussi.

D'après le lemme cité, on peut décomposer le tétraèdre  $OABC$  en 60 tétraèdres semblables avec lesquels on construit un polyèdre équivalent à un cube, ce qui démontre la proposition.

Remarque: Le tétraèdre  $T_1$  de ce deuxième cas n'appartient à aucune des classes de tétraèdres de HILL; il en est de même du tétraèdre  $T_2 = ABCC'$ .

Si l'on constate que les faces  $AOC$  et  $COB$  du tétraèdre  $T_1$  sont semblables, on peut ajouter ou retrancher de  $T_1$  un tétraèdre semblable  $T'_1$  en faisant coïncider les faces  $OA'C'$  et  $OCB$ . Les tétraèdres  $T_3$  et  $T_4$  ainsi obtenus sont également équivalents à des cubes. Nous avons donc 4 nouveaux exemplaires dont les caractéristiques sont les suivantes:

	$T_1$		$T_2$		$T_3$		$T_4$	
	arête	dièdre	arête	dièdre	arête	dièdre	arête	dièdre
$AB$	$\sqrt{5} + 1$	$\pi/2$	$\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\pi/5$	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\pi/5$
$AC$	$\sqrt{5} - 1$	$\pi/2$	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\pi/5$	$\sqrt{12}$	$\pi/3$	$\sqrt{12}$	$\pi/3$
$AD$	2	$\pi/2$	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\pi/5$	4	$\pi/2$	$2\sqrt{5} - 2$	$\pi/2$
$BC$	$\sqrt{12}$	$\pi/3$	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$2\pi/5$	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$3\pi/5$	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\pi/5$
$BD$	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\pi/5$	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$2\pi/5$	$\sqrt{18 - 6\sqrt{5}}$	$\pi/3$	$\sqrt{18 - 6\sqrt{5}}$	$2\pi/3$
$CD$	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$2\pi/5$	4	$\pi/2$	$\sqrt{20 - 10\sqrt{5}}$	$2\pi/5$	$\sqrt{20 - 10\sqrt{5}}$	$3\pi/5$

Ces quatre tétraèdres sont les seuls tétraèdres que nous connaissons jusqu'à présent qui soient équivalents à un cube sans être des tétraèdres de HILL.

Ainsi donc, dans ce cas aussi, les conditions nécessaires de DEHN sont également suffisantes, ce qui donne un certain intérêt au polyèdre que nous avons cité dans un dernier article [6] et qui est notre seul exemple d'un polyèdre vérifiant les conditions nécessaires de DEHN, sans que l'on sache si, oui ou non, il est équivalent à un cube.

J.-P. SYDLER, Zürich.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten, 1900.
- [2] M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. 55, 465-478 (1902).
- [3] J.-P. SYDLER, *Sur la décomposition des polyèdres*. Comment. math. helvet. 16, 266-273 (1943/44).
- [4] G. W. HILL, *Determination of the Volume of Certain Species of Tetrahedrons*, Proc. London math. Soc. 27, 39-53 (1896).
- [5] H. HADWIGER, *Ungelöste Probleme Nr. 9*, El. Math. 11, 15 (1956).
- [6] J.-P. SYDLER, *Quelques propriétés de la configuration complémentaire de Desargues*, El. Math. 10, 32-37 (1955).