Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1956)
Heft: 5

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

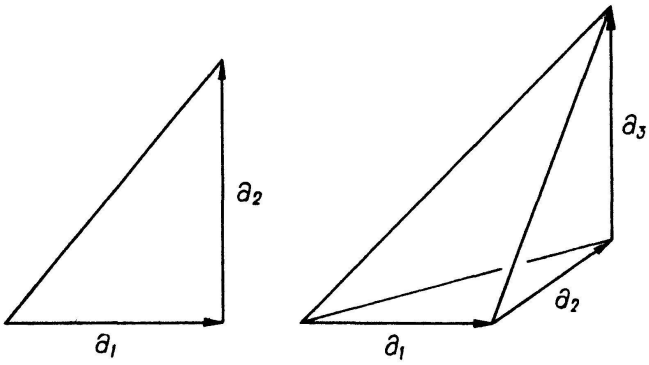
Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

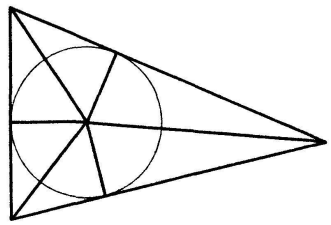
Ungelöste Probleme

Nr. 13. Es ist eine triviale Tatsache, dass ein ebener polygonaler Bereich im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Lässt sich ein räumlicher polyedrischer Bereich analog in rechtwinklige Tetraeder zerlegen?

Um diese Frage exakt und für beliebige Dimensionen formulieren zu können, ist es erforderlich, zunächst das Orthogonalsimplex des k-dimensionalen euklidischen Raumes zu definieren, das unter den Simplexen die nämliche Sonderstellung einnimmt wie im ebenen Fall das rechtwinklige Dreieck unter den beliebigen Dreiecken.



Figur 1



Figur 2

Das Orthogonalsimplex[1]) T lässt sich durch die vektorielle Parameterdarstellung $t = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$ $(1 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0)$ seiner Punkte $t \in T$ charakterisieren, wobei a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ k paarweise orthogonale Vektoren bezeichnen. Orthogonalsimplexe im ebenen und räumlichen Fall $(k = 1, 2)$ sind in Figur 1 dargestellt.

Dass die einleitend erwähnte Zerlegung ebener Polygone immer möglich ist, ergibt sich mit der Bemerkung, dass sich bereits ein beliebiges Dreieck auf einfachste Art in der gewünschten Weise zerlegen lässt.

Eine im Hinblick auf die mehrdimensionale Erweiterung instruktive Zerlegung eines Dreiecks in 6 rechtwinklige Teildreiecke ist in Figur 2 gezeigt; sie ergibt sich dadurch, dass man vom Inkreismittelpunkt des gegebenen Dreiecks die Lote auf die drei Seiten fällt.

Die Angabe bei P. H. SCHOUTE[2]), dass die analoge Konstruktion auch im k-dimensionalen Fall zu einer Zerlegung eines beliebigen Simplex in $(k+1)!$ Orthogonalsimplexe führt, ist unrichtig.

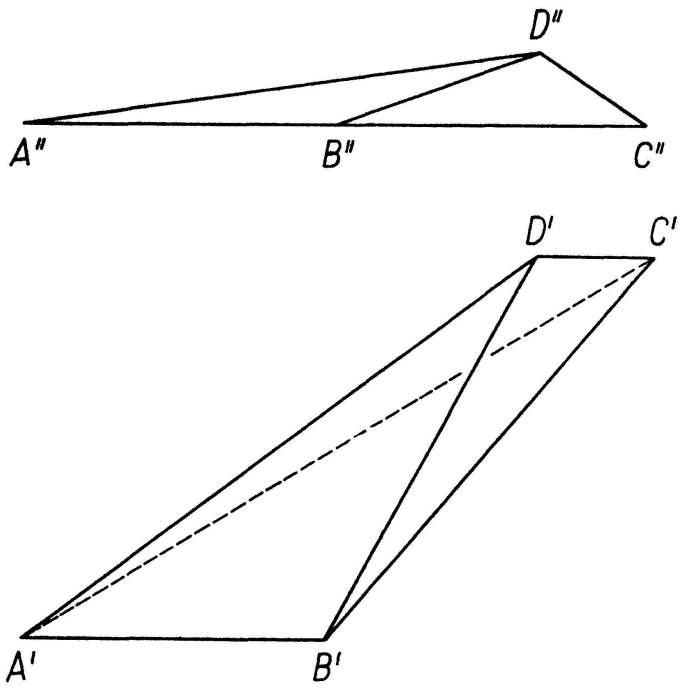
Dieser Zerlegungsprozess ist nur dann erfolgreich, wenn die Fusspunkte der vom Inkugelmittelpunkt auf die $k(k+1)/2$ eindimensionalen Kanten gefällten Lote alle in den Kanten selbst liegen.

---

[1]) Nach der von L. SCHLÄFLI in seiner *Theorie der vielfachen Kontinuität* verwendeten Terminologie kann dieses Simplex «Orthoschem» genannt werden. Vgl. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. I (Basel 1950), S. 243.

[2]) P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, II. Teil (Leipzig 1905), S. 123.

Während nun im ebenen Fall jedes Dreieck einen konvexen Teilbereich aufweist (der mindestens einen Eckpunkt und sicher den Inkreismittelpunkt enthält), dessen Punkte die Eigenschaft haben, dass die Fusspunkte der Seitenlote den Seiten selbst zugehören, gibt es im räumlichen Fall Tetraeder, die überhaupt keinen Punkt der entsprechenden Eigenschaft besitzen. Figur 3 zeigt ein solches von Herrn H. KUMMER (Bern) konstruiertes Tetraeder in Grund- und Aufriss. Die Eckpunkte sind $A(0|0|0)$, $B(a|0|0)$, $C(b|a|0)$ und $D(c|a|a)$, wobei $0 < 2a < a + b < 2c < 2b - 2a < 2b$ vorausgesetzt ist.



Figur 3

Mit diesem Befund ist aber die Frage der Zerlegung eines Polyeders in Orthogonalsimplexe allgemein problematisch geworden. Mit anderen Worten ist für $k > 2$ ungeklärt, ob die Orthogonalsimplexe universelle Bausteine der Polyeder des Raumes sind. H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 242. Ein Rotationshyperboloid sei gegeben durch den Radius R des Kehlkreises K und den Radius ϱ des Scheitelkrümmungskreises der erzeugenden Hyperbel. Das Hyperboloid wird von einem geraden Kreiszylinder mit dem Radius $r \leqq \varrho$, dessen Achse in der Ebene von K liegt, berührt. Man bestimme den Winkel, um den der Zylinder um die Normale des Berührungspunktes (nach einer Seite) gedreht werden kann, ohne sich von K abzuheben. E. TROST, Zürich.

Lösung: Steht die Zylinderachse senkrecht zur Bildebene, dann stimmt der scheinbare Umriss des Hyperboloids mit der erzeugenden Hyperbel H überein. Die Daten von H sind: $a = R$, $b = \sqrt{R\varrho}$, $c = \sqrt{R(R+\varrho)}$. Dreht man jetzt das Hyperboloid um die Zylinderachse in die gewünschte Lage, dann ist der Radius r des Kreiszylinders gleich dem Radius des Scheitelkrümmungskreises der scheinbaren Umrisshyperbel H_1. Somit