Berechnung und Drucken einer achtstelligen Logarithmentafel als Beispiel für das Arbeiten eines Rechenautomaten

Autor(en): **Läuchli, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18629

Berechnung und Drucken einer achtstelligen Logarithmentafel als Beispiel für das Arbeiten eines Rechenautomaten

Mit den folgenden Zeilen soll an einem übersichtlichen Schulbeispiel gezeigt werden, wie etwa ein moderner Rechenautomat zweckmässig eingesetzt werden kann. Es wird dabei mathematisch nichts wesentlich Neues vermittelt, sondern vielmehr Wert darauf gelegt, die Methoden, die beim Maschinenrechnen Verwendung finden, etwas zu beleuchten. Es ist wohl kaum nötig, in diesem Zusammenhange auf die stets wachsende Bedeutung der programmgesteuerten Rechenmaschinen hinzuweisen, welche seit einigen Jahren auch in Europa immer mehr zum Einsatz gelangen und uns erst die Ausführung grösserer numerischer Rechnungen innert vernünftiger Zeit erlauben.

Über die Organisation eines digitalen (das heisst ziffernmässig arbeitenden) Rechenautomaten zunächst ein paar Worte: Das Rechenwerk kann die vier arithmetischen Grundoperationen ausführen. Aus diesen müssen alle höheren Operationen aufgebaut werden. Ein Speicherwerk, das in Zellen aufgeteilt ist, von denen jede eine mehrstellige Zahl fasst, dient zur Aufbewahrung einer grossen Anzahl von Konstanten und Zwischenresultaten. Das Leitwerk steuert unter Kontrolle des Rechenprogrammes den Ablauf der Rechnung. Dieses Programm, das meistens in einer Zahlenverschlüsselung im Speicherwerk untergebracht ist, besteht aus den einzelnen Befehlen. Ein solcher Befehl löst zum Beispiel eine Rechenoperation aus, transferiert eine Zahl zwischen Rechenwerk und Speicher, gibt eine Zahl vom Rechenwerk in die elektrische Schreibmaschine, verlangt durch Aufleuchten einer Lampe die Eingabe einer Zahl in die Tastatur des Bedienungspultes, oder unterbricht den normalen Programmablauf, um an irgendeine andere gewünschte Stelle des Programmes zu springen. Diese Sprungbefehle, besonders in bedingter Form (das heisst, die Ausführung des Sprunges hängt zum Beispiel vom Vorzeichen der Zahl im Rechenwerk ab), ermöglichen eine komplizierte Struktur des Programmes und gestatten dadurch, dass gewisse Zyklen mehrmals durchlaufen werden, erst eine rationelle Ausnützung der Maschine.

Das im folgenden besprochene Beispiel wurde zu Demonstrationszwecken für die ERMETH (Elektronische Rechen-Maschine der ETH), welche im Institut für angewandte Mathematik (Leitung: Prof. Dr. E. Stiefel) gebaut wurde, vorbereitet und auf der Maschine, die ihrer Fertigstellung entgegengeht, ausprobiert. Die mathematischen Anregungen stammen von Prof. Dr. H. Rutishauser.

Es handelt sich um die Tabellierung der 8stelligen Mantissen der 10er-Logarithmen mit 5stelligem Eingang. Das Programm soll insbesondere so aufgebaut sein, dass die Tabelle an jeder beliebigen Stelle angefangen werden kann und dass ferner die Resultate von der Schreibmaschine in der üblichen Form druckfertig herausgegeben werden (siehe Figur 1). Nach dem Vollschreiben eines Schreibmaschinenblattes soll die Maschine automatisch anhalten.

Die Berechnung der Logarithmen geschieht in folgender Weise: Einen Anfangswert erhalten wir durch Integration der Funktion $1/x$ mittels der Gaußschen Quadraturformel. Dann braucht man nur noch Differenzen zu berechnen, welche sich in einfacher Weise aus einer Reihenentwicklung ergeben.

Die Gaußsche Formel

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{r=1}^{n} w_r f(\xi_r) + \text{Restglied}$$

(die w_r und ξ_r sind tabelliert) ergibt nach der Transformation des Integrationsintervalles:

$$\ln \frac{x}{a} = \int_a^x \frac{d\xi}{\xi} \approx \sum_r \frac{w_r (x-a)}{2a + (1+\xi_r)(x-a)} = \sum_r \frac{w_r}{2a/(x-a) + 1 + \xi_r}.$$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1000	000	00000	04343	08685	13027	17368	21709	26050	30390	34730	39069
1001		43408	47746	52084	56422	60759	65095	69432	73767	78103	82438
1002		86772	91106	95440	99773	*04106	*08438	*12770	*17101	*21433	*25763
1003	001	30093	34423	38752	43081	47410	51738	56065	60392	64719	69045
1004		73371	77697	82022	86346	90670	94994	99317	*03640	*07963	*12285
1005	002	16606	20927	25248	29568	33888	38207	42526	46845	51163	55481
1006		59798	64115	68431	72747	77063	81378	85693	90007	94321	98634
1007	003	02947	07260	11572	15883	20195	24505	28816	33126	37435	41745
1008		46053	50361	54669	58977	63284	67590	71896	76202	80507	84812
1009		89117	93421	97724	*02027	*06330	*10632	*14934	*19236	*23537	*27837
1010	004	32137	36437	40736	45035	49334	53632	57929	62227	66523	70820
1011		75116	79411	83706	88001	92295	96589	*00882	*05175	*09468	*13760
1012	005	18051	22342	26633	30924	35214	39503	43792	48081	52369	56657
1013		60945	65232	69518	73804	78090	82375	86660	90945	95229	99512
1014	006	03795	08078	12361	16643	20924	25205	29486	33766	38046	42325
1015		46604	50883	55161	59439	63716	67993	72269	76545	80821	85096
1016		89371	93645	97919	*02193	*06466	*10738	*15011	*19282	*23554	*27825
1017	007	32095	36365	40635	44904	49173	53442	57710	61977	66245	70511
1018		74778	79044	83309	87574	91839	96103	*00367	*04631	*08894	*13156
1019	008	17418	21680	25941	30202	34463	38723	42983	47242	51501	55759

Figur 1

Wir nehmen die letzte Form, da diese weniger Rechenoperationen erfordert (Multiplikation und Division fallen besonders ins Gewicht), also:

$$\ln x \approx \ln a + \sum_{r=1}^{n} \frac{w_r}{c + d_r}; \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{2a}{x-a}, \qquad d_r = 1 + \xi_r.$$

Die w_r und d_r werden von vornherein gespeichert. Für die Berechnung eines Logarithmus muss c nur einmal am Anfang gebildet werden. Die Berechnung der n Quotienten geschieht mit ein und demselben Befehlszyklus, der n-mal durchlaufen wird. Zuletzt kommt natürlich noch die Multiplikation mit $\log e$.

a wählt man nicht $=1$, sondern so, dass das Maximum des absoluten Fehlers möglichst klein wird. x variiert in den Grenzen $1 \leq x < 10$. Da nun die Näherungsformel die gleiche Symmetrieeigenschaft bezüglich a hat wie $\ln x/a$ und die Abweichungen am Rande am grössten sind, nimmt man das geometrische Mittel: $a = \sqrt{10}$.

Die in Frage stehende Maschine rechnet 11stellig, mit gleitendem Komma (das heisst Verarbeitung der Zahlen in der Form $a \cdot 10^{\alpha}$). Bei $n = 8$ Stützstellen der numerischen Integration beträgt der Fehler an den Enden des Intervalls 10^{-9}. Setzt man $n = 10$, so bleiben nur noch Rundungsfehler in den letzten Stellen. Für den weiteren Aufbau unserer Tabelle verwenden wir die bekannte Beziehung

$$\ln(y + \delta) - \ln(y - \delta) = \ln \frac{1 + \frac{\delta}{y}}{1 - \frac{\delta}{y}} = 2 \operatorname{artgh} \frac{\delta}{y}$$

$$= 2 \left[\frac{\delta}{y} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\delta}{y} \right)^5 + \cdots \right].$$

Eine einfache Abschätzung zeigt, dass die zwei ersten Reihenglieder genügen, auch wenn wir mit 14 Stellen rechnen, was auf unserer Maschine möglich ist, sofern wir auf das gleitende Komma verzichten. Das Komma bleibt dann vor der ersten Stelle fixiert. Es ist vorteilhaft, hier von dieser Möglichkeit Gebrauch zu machen, da einerseits die Grössenordnung der vorkommenden Zahlen genau bekannt ist, andererseits aber die drei zusätzlichen Stellen sehr willkommen sind, da damit die gefährliche Anhäufung von Rundungsfehlern vermieden werden kann.

Nach der Substitution $\delta = \Delta/2$, $y = x + \Delta/2$ und einer einfachen Umformung, welche wieder den Rechenaufwand minimalisieren soll, heisst unsere Formel schliesslich:

$$\log(x + \Delta) - \log x \approx \varepsilon\,(h + k\,\varepsilon^2)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{2x + \Delta}, \qquad h = 2 \log e, \qquad k = \frac{2}{3} \log e.$$

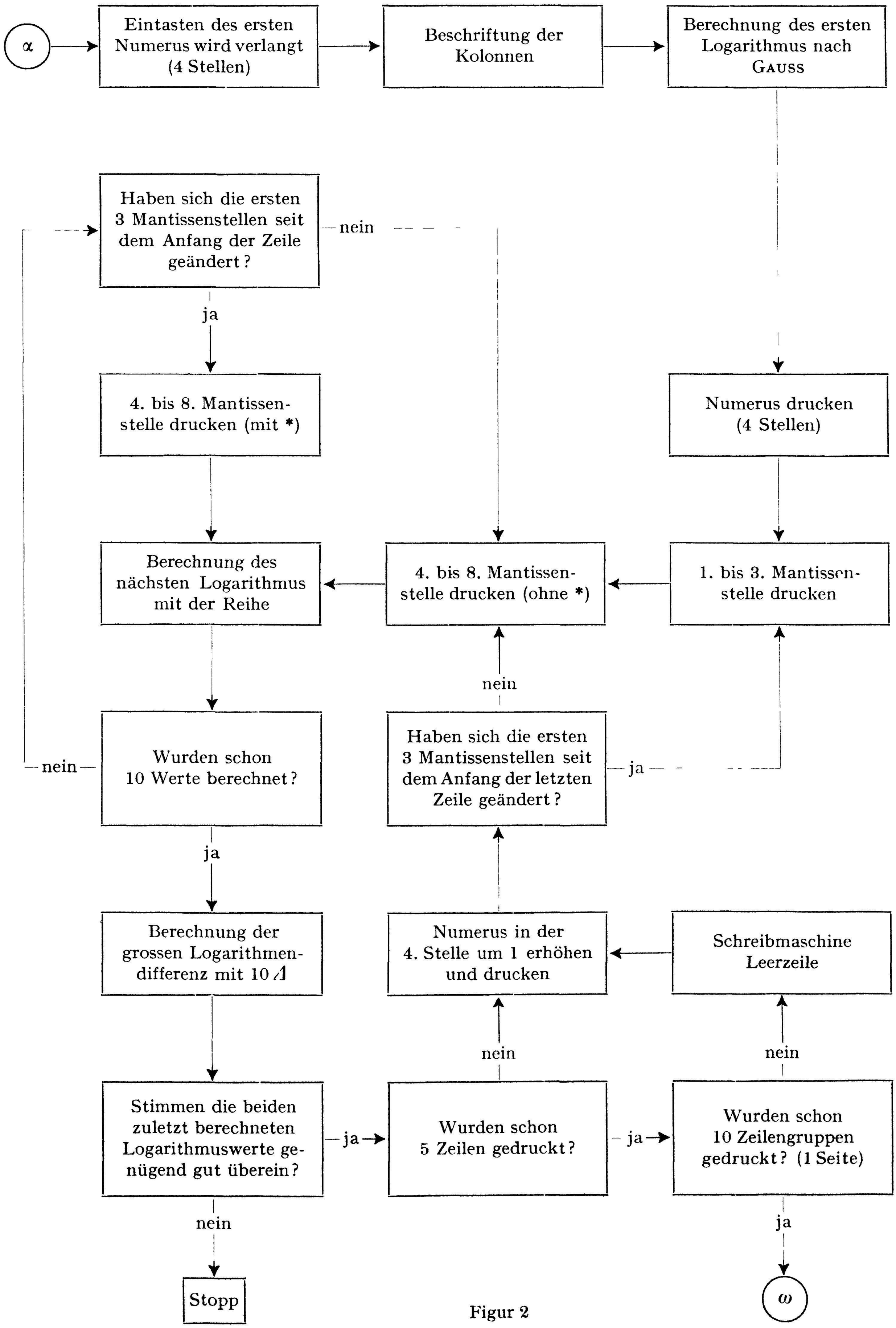
Der Argumentschritt Δ bleibt für 10 aufeinanderfolgende Schritte (eine Zeile der Tabelle) konstant, nämlich 0,0001. Dann wird zur Kontrolle mit dem 10fachen Δ der letzte Wert direkt aus dem ersten berechnet und verglichen. (Als Toleranz erwiesen sich etwa 20 Einheiten der letzten Stelle als nötig). Fällt die Kontrolle durch, so hält die Maschine an, und eine Lampe am Bedienungspult leuchtet auf.

Der Gesamtablauf des Programmes ist im groben Strukturdiagramm von Figur 2 dargestellt. Jedes Kästchen bedeutet ein Stück aus dem Programm. Alle Vorgänge laufen vollautomatisch ab.

Die grosse Flexibilität beim Herausdrucken von Zahlen, welche uns hier sehr zustatten kommt, beruht auf der Möglichkeit, mehrere Druckschemata auf einem Steckbrett vorzubereiten und diese durch verschiedene Druckbefehle aufzurufen. So werden die 11- (bei der Differenzenbildung 14-) stellig berechneten Mantissen auf 8 Stellen abgerundet (durch Addition von 5 in der 9. Stelle) und dann die gewünschten 3- oder 5stelligen Zifferngruppen aus der vollen Zahl herausgedruckt.

Das Abzählen der 10 Zahlen einer Zeile, von 5 Zeilen usw. geschieht in besonderen Registern, welche beim Erreichen der kritischen Zahl eine Bedingung für einen der erwähnten bedingten Sprungbefehle stellen und so die im Diagramm angedeuteten Fallunterscheidungen erlauben.

Für die Realisierung des Sternes, der das Umschlagen der dritten Mantissenstelle anzeigt, wird eine weitere Maschineneigenschaft benutzt: Jede Zahl, die sich in der Maschine befindet, ist mit einer besonderen Markierungsstelle versehen. Die Anwe-


α
Eintasten des ersten Numerus wird verlangt (4 Stellen)
Beschriftung der Kolonnen
Berechnung des ersten Logarithmus nach GAUSS
Haben sich die ersten 3 Mantissenstellen seit dem Anfang der Zeile geändert?
nein
ja
4. bis 8. Mantissenstelle drucken (mit *)
Numerus drucken (4 Stellen)
Berechnung des nächsten Logarithmus mit der Reihe
4. bis 8. Mantissenstelle drucken (ohne *)
1. bis 3. Mantissenstelle drucken
nein
nein
Wurden schon 10 Werte berechnet?
Haben sich die ersten 3 Mantissenstellen seit dem Anfang der letzten Zeile geändert?
ja
ja
Berechnung der grossen Logarithmendifferenz mit 10 Δ
Numerus in der 4. Stelle um 1 erhöhen und drucken
Schreibmaschine Leerzeile
nein
nein
Stimmen die beiden zuletzt berechneten Logarithmuswerte genügend gut überein?
ja
Wurden schon 5 Zeilen gedruckt?
ja
Wurden schon 10 Zeilengruppen gedruckt? (1 Seite)
nein
ja
Stopp
ω

Figur 2

senheit dieser Marke kann beim Drucken zum Beispiel durch einen Stern zur Anzeige gebracht werden. Wird nun festgestellt, dass die zuletzt berechnete Mantisse von der ersten der gleichen Zeile in den ersten drei Stellen abweicht, so wird die betreffende Zahl vor dem Drucken mit der Marke versehen.

Zum Schluss noch einige Angaben, welche den Umfang des Problems charakterisieren: Unser Programm enthält 127 Befehle und 33 Konstanten. Es benötigt ferner 12 Rechenzellen für Zwischenresultate. Rechenaufwand und Geschwindigkeit der Maschine stehen in einem solchen Verhältnis, dass die Schreibmaschine ständig drucken kann, ohne auf die Berechnung des nächsten Wertes warten zu müssen. Das Vollschreiben einer Seite mit 50 Zeilen dauert etwa eine Viertelstunde.

P. LÄUCHLI, Zürich.

Ungelöste Probleme

Nr. 14. Herr W. SIERPIŃSKI (Warschau) macht uns auf folgendes Problem aufmerksam, das von W. MNICH gestellt wurde und anscheinend bisher noch keine Lösung gefunden hat:

Können Summe und Produkt von drei rationalen Zahlen gleichzeitig gleich 1 *sein?*

Für mehr als drei rationale Zahlen ist dies sogar auf unendlich viele Arten möglich, wie Herr A. SCHINZEL (Warschau) festgestellt hat, dem wir die folgenden Bemerkungen verdanken.

Es seien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{s-4}$ $s-3$ von Null verschiedene rationale Zahlen, welche den Bedingungen

$$g = a_1 + a_2 + \cdots + a_{s-4} \neq 1, \qquad h = a_0^2 a_1 a_2 \cdots a_{s-4} \neq 1, \qquad s > 3$$

genügen. Wir setzen

$$x_i = a_i \ (i = 1, 2, \ldots, s-4), \qquad x_{s-3} = \frac{g-1}{h-1},$$

$$x_{s-2} = -\frac{h(g-1)}{h-1}, \qquad x_{s-1} = \frac{(h-1)\,a_0}{h(g-1)}, \qquad x_s = \frac{(1-h)\,a_0}{h(g-1)}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass jedes derartige System $x_1, x_2, \ldots, x_s$ die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_s = x_1 x_2 \cdots x_s = 1$$

erfüllt.

Für $s = 4$ kann man folgende Lösungsformeln verwenden, wo a_0 eine von Null verschiedene rationale Zahl mit $a_0^2 \neq 1$ bedeutet:

$$x_1 = -\frac{1}{a_0^2 - 1}, \qquad x_2 = \frac{a_0^2}{a_0^2 - 1}, \qquad x_3 = \frac{1 - a_0^2}{a_0}, \qquad x_4 = \frac{a_0^2 - 1}{a_0}.$$

Für $s = 5$ gibt es eine ganzzahlige Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = -1$. Man kann beweisen, dass ganzzahlige Lösungen nur für $s = 4n + 1$ existieren.

W. SIERPIŃSKI hat bewiesen, dass das Problem von MNICH äquivalent ist mit der Frage, ob die diophantische Gleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 = a\,b\,c$$

Lösungen in ganzen, nicht verschwindenden Zahlen a, b, c besitzt.