

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 6

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bemerkenswert ist, dass die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s = x_1 x_2 \dots x_s$$

für jedes natürliche s wenigstens eine Lösung in natürlichen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_s besitzt; für $s > 2$ hat man nur $x_1 = x_2 = \dots = x_{s-2} = 1, x_{s-1} = 2, x_s = s$ zu setzen. Bezeichnen wir mit n_s die Anzahl der Lösungen in ganzen Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_s$, so ist $n_2 = n_3 = n_4 = 1, n_5 = 3, n_6 = 1$. Man kann mühelos zeigen, dass n_s für $s > 1$ endlich ist und dass die Abschätzung

$$n_{2^{2k+1}} > k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

gilt. Hingegen ist es eine offene Frage, ob die Zahlen n_s mit s unbeschränkt wachsen.

E. TROST.

Nachtrag zu Nr. 8 [El. Math. 10, 130–132 (1955)]: Der dort als Vermutung formulierte Satz, wonach eine auf der Kugelfläche definierte stetige Funktion in den drei Eckpunkten eines sphärischen Dreiecks, das mit einem beliebig vorgegebenen Dreieck auf der Kugelfläche kongruent ist, gleiche Werte annimmt, ist tatsächlich richtig. Die Aussage wurde kürzlich von E. E. FLOYD [*Real-Valued Mappings of Spheres*, Proc. Amer. math. Soc. 6, 957–959 (1955)] bewiesen.

H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 248. Man beweise: Jede der beiden Beziehungen

$$\varrho^i + \varrho_a^i + \varrho_b^i + \varrho_c^i = a^i + b^i + c^i \quad (i = 1, 2)$$

stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass das Dreieck mit den Seiten a, b, c , dem Inkreisradius ϱ und den Ankreisradien $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ rechtwinklig ist.

E. TROST, Zürich.

Lösung: Wir benützen die bekannten Formeln (s halber Dreiecksumfang, r Umkreisradius):

$$\begin{aligned} \varrho &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, & \varrho_a &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \varrho_b &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, & \varrho_c &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ s &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, & s - a &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ s - b &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, & s - c &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Für alle natürlichen i gilt dann

$$\begin{aligned} &(\varrho^i + \varrho_a^i + \varrho_b^i + \varrho_c^i) - [s^i + (s - a)^i + (s - b)^i + (s - c)^i] \\ &= (4r)^i \left(\sin^i \frac{\alpha}{2} - \cos^i \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sin^i \frac{\beta}{2} - \cos^i \frac{\beta}{2} \right) \left(\sin^i \frac{\gamma}{2} - \cos^i \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Für $i = 1, 2$ gilt aber

$$s^i + (s - a)^i + (s - b)^i + (s - c)^i = a^i + b^i + c^i,$$

woraus die Aussage der Aufgabe unmittelbar folgt. A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Weitere Lösungen sandten J. BERKES (Szeged), K. EJRNAES (Tønder, Dänemark), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest).

Aufgabe 249. Man bestimme sämtliche Kurven mit der Eigenschaft, dass die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt T die Verbindungsstrecke zweier gegebener Punkte A, B im Verhältnis $\overline{AT}^2 : \overline{BT}^2$ schneidet. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht.

Lösung: Die Linienelemente eines elliptischen Kreisbüschels $\{k_e\}$ mit den (reellen) Grundpunkten A, B werden durch die Kreise des konjugierten hyperbolischen Kreisbüschels $\{k_h\}$ mit den (konjugiert komplexen) Grundpunkten C, D so geordnet, dass alle Punkte auf einem Kreis k_h die Tangenten durch dessen Mitte M senden.

Jeder Kreis k_h ist apollonischer Kreis der Strecke AB für ein festes Teilverhältnis $\lambda = AT : BT$. Also ist auch $AT^2 : BT^2 = \lambda^2 = \text{const.}$ Wie eine kurze elementare Rechnung zeigt, gilt für die Kreismitte M

$$AT^2 : BT^2 = AM : BM = \lambda^2. \quad (1)$$

Dies gibt den Satz: *Alle Kurven mit der Eigenschaft, dass die Tangenten in einem beliebigen Kurvenpunkt T eine gegebene Strecke AB von aussen im Verhältnis $AT^2 : BT^2$ teilen, sind die Kreise des elliptischen Kreisbüschels mit den Grundpunkten A, B .*

Für die Teilung von *innen* verwenden wir folgende Überlegung: Die harmonische Zentralkollineation mit dem Zentrum A und der Kollineationsachse durch B normal AB vertauscht die Punkte C, D mit den absoluten Kreispunkten, während A, B festbleiben. Ist M' der M in der Kollineation entsprechende Punkt, so liegt M, M' zu A, B harmonisch. Also gilt (abgesehen vom Vorzeichen) $AM : BM = AM' : BM'$. Der zu einem Punkt T entsprechende Punkt T' bildet mit A und dem Schnittpunkt X des durch T gehenden Kollineationsstrahles mit der Kollineationsachse einen harmonischen Wurf: $(AXTT') = -1$ oder, abgesehen vom Vorzeichen, $AT : XT = AT' : XT'$. Diese vier Punkte werden aus B durch vier harmonische Strahlen projiziert. Da $AB \perp BX$ verläuft, ist $\sphericalangle TBX = \sphericalangle XBT'$, das heisst $BT : BT' = XT : XT'$.

Damit ist gezeigt, dass durch die Kollineation die Beziehung (1) übergeht in

$$AT'^2 : BT'^2 = |AM' : BM'|. \quad (2)$$

Das hyperbolische Kreisbüschel $\{k_h\}$ mit den Grundpunkten C, D bleibt bei obiger Zentralkollineation kreisweise fest. Hingegen ein Kreis k_e des elliptischen Kreisbüschels mit den Grundpunkten A, B , dessen Schnittpunkte mit der Verschwindungsgeraden CD zu C, D harmonisch liegen, geht in einen Kegelschnitt durch A, B, C, D über, dessen Fernpunkte zu den absoluten Kreispunkten harmonisch liegen. k'_e ist demnach eine gleichseitige Hyperbel des Büschels A, B, C, D . Das ergibt den Satz:

Alle Kurven mit der Eigenschaft, dass die Tangenten in einem beliebigen Kurvenpunkt T eine gegebene Strecke AB von innen im Verhältnis $AT^2 : BT^2$ teilen, bilden ein Büschel konzentrischer gleichseitiger Hyperbeln durch A und B .

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien.

Ist die Strecke in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch $A(-a|0)$ und $B(a|0)$ bestimmt, so ergeben sich für die gesuchten Kurven die Differentialgleichungen

$$x y' (x^2 + y^2 - a^2) = y (x^2 + y^2 + a^2) \quad (\text{innere Teilung}), \quad (1)$$

$$y' (x^2 - y^2 - a^2) = 2 x y \quad (\text{äussere Teilung}). \quad (2)$$

(1) ist die Differentialgleichung der Kurvenschar

$$x^2 + c x y - y^2 = a^2.$$

Diese besteht aus gleichseitigen Hyperbeln, für die AB ein Durchmesser ist. (2) ist die Differentialgleichung des Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 + c x y - a^2 = 0 \quad (\text{Kreise über der Sehne } AB).$$

Diese Lösung sandten L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz) und der Aufgabensteller.

Aufgabe 250. Ist in der Ebene eine Menge von n Punkten gegeben, deren Durchmesser (maximale Entfernung eines Punktepaares) 1 ist, so kann bekanntlich¹⁾ die Entfernung 1 höchstens n -mal vorkommen.

Es sei nun eine Menge von $3n$ Punkten mit dem Durchmesser 1 gegeben. Dann gibt es höchstens $3n^2$ Punktepaaire mit einer Entfernung $\geq 1/\sqrt{2}$. Der Satz lässt sich nicht verschärfen, selbst wenn man $1/\sqrt{2}$ durch $1 - \varepsilon$ ersetzt. P. ERDÖS, Haifa.

Lösung: In einer n -punktigen ebenen Menge vom Durchmesser 1 bezeichne $A(n)$ die Anzahl der Abstandspaare, das heisst der Punktpaare mit Abstand $\geq 1/\sqrt{2}$. Die Abschätzung $A(3k) \leq 3k^2$ ist richtig für $k = 0$ und $k = 1$ und sei für $k < n$ schon bewiesen. Ihre Gültigkeit für $k = n$ kann dann aus der Rekursionsformel

$$A(m) = A(k) + A(m - k) + B(k, m - k)$$

erschlossen werden; dabei sei die m -punktige Menge in zwei fremde Teilmengen von k bzw. $m - k$ Punkten aufgeteilt, und $B(k, m - k)$ sei die Zahl der Abstandspaare, die aus je einem Punkt beider Teilmengen bestehen. Es gilt, Aufteilungen zu finden, bei denen $B(k, m - k)$ klein ist; die Abschätzung $B(k, m - k) \leq k(m - k)$ ist zu schwach.

Bilden $k = 4$ unter den $m = 3n$ Punkten die Eckpunkte eines Quadrats mit Seitenlänge $1/\sqrt{2}$, so kann jeder weitere Punkt im Abstand ≤ 1 von allen Quadratecken mit höchstens zwei dieser Ecken ein Abstandspaar bilden, so dass hier

$$B(4, 3n - 4) \leq 2(3n - 4)$$

wird. Berücksichtigt man ferner, dass

$$A(3n - 4) \leq A[3(n - 2)] + A(2) + 2(3n - 6) \leq 3(n - 2)^2 + 1 + 2(3n - 6) = 3n^2 - 6n + 1$$

gilt, so resultiert

$$A(3n) = A(3n - 4) + A(4) + B(4, 3n - 4) \leq (3n^2 - 6n + 1) + 6 + 2(3n - 4) < 3n^2.$$

Es sei nun unter den $3n$ Punkten kein derartiges Quadrat enthalten. Man darf annehmen, dass ein Punkt P_0 zu mehr als einem Abstandspaar gehört (da sonst höchstens $3n/2 < 3n^2$ Abstandspaare vorhanden wären), und P_0P_1, P_0P_2 seien die Abstandspaare, die bei P_0 den grössten Winkel $\leq \pi$ einschliessen. Wegen der Durchmesserbedingung ist $\sphericalangle P_1P_0P_2 \leq \pi/2$. Ferner muss (wegen der Maximaleigenschaft dieses Winkels) jeder Punkt P_i , der mit P_0 ein Abstandspaar bildet, im Winkelraum $P_1P_0P_2$ liegen. P_i kann dann nicht zugleich mit P_1 und P_2 ein Abstandspaar bilden; andernfalls hätte nämlich das Viereck $P_1P_0P_2P_i$ Seiten $\geq 1/\sqrt{2}$ und Diagonalen ≤ 1 , wäre somit ein Quadrat mit Seitenlänge $1/\sqrt{2}$, was ausgeschlossen wurde. Jeder Punkt P kann daher mit höchstens zwei der drei Punkte P_0, P_1, P_2 ein Abstandspaar bilden, so dass $B(3, 3n - 3) \leq 2(3n - 3)$ wird. Daraus resultiert

$$A(3n) \leq A(3n - 3) + A(3) + 2(3n - 3) \leq 3(n - 1)^2 + 3 + 2(3n - 3) = 3n^2.$$

Dass die Zahl $3n^2$ auch bei Ersetzung von $1/\sqrt{2}$ durch $1 - \varepsilon$ nicht verbessert werden kann, zeigt etwa die Eckpunktmenge von n konzentrischen, gleichorientierten gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlängen $\geq 1 - \varepsilon$ und ≤ 1 . H. DEBRUNNER, Bern.

Besteht die Punktmenge nicht aus den vier Ecken eines Quadrates mit der Diagonale 1, so gilt, wie A. BAGER (Hjørring) in seiner Lösung zeigt, die allgemeinere (auch vom Aufgabensteller mitgeteilte) Abschätzung

$$A(n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor, \quad ([\alpha] = \text{grösste ganze Zahl} \leq \alpha).$$

¹⁾ Vgl. Jber. dtsch. Math.-Ver. 43, 114 (1934).

Neue Aufgaben

283. Wir betrachten einen ebenen Bereich B , begrenzt durch die geschlossene Kurve C . Eine Linie ohne Doppelpunkte, welche zwei Punkte von C verbindet und innerhalb B verläuft, heisst ein *Bisektor* von B , wenn sie B in zwei inhaltsgleiche Teile teilt. Ein Bisektor heisst *kürzester Bisektor* von B , wenn es keinen Bisektor von geringerer Länge in B gibt (vgl. des Aufgabenstellers *Mathematics and Plausible Reasoning*, Bd. 1, S. 185–186, Aufgaben 27–33). Man beweise:

Bei gegebenem Flächeninhalt wird der kürzeste Bisektor Maximum (also ein «maximum minimorum» oder «Maximin»):

1. für das gleichseitige Dreieck unter allen Dreiecken,
2. für das Quadrat unter allen Parallelogrammen,
3. *nicht* für das Quadrat unter allen Vierecken,
4. für den Kreis unter allen zentralsymmetrischen Bereichen. (Ob der Satz unter 4. richtig bleibt, wenn das Wort «zentralsymmetrisch» gestrichen wird, ist eine offene Frage.)

G. PÓLYA, Palo Alto, California, USA.

284. Eine Punktmenge M im n -dimensionalen Raum sei durch endlich viele Ungleichungen $L_i(x) \geq 0$ definiert, wobei jedes $L_i(x)$ ein lineares Polynom in den Koordinaten x_1, \dots, x_n ist. Die Menge habe innere Punkte. Eine Seite von M wird dadurch definiert, dass in einigen von den Ungleichungen das Zeichen \geq durch $=$ ersetzt und in den übrigen das Zeichen \geq beibehalten wird. Eine $(n-1)$ -dimensionale Seite heisse eine *Wand*. Auf einer Wand W_k kann, von konstanten Faktoren abgesehen, nur eine Gleichung $L_i = 0$ gelten. Zu den Wänden W_1, \dots, W_m mögen die Gleichungen $L_1 = 0, \dots, L_m = 0$ gehören. Behauptung: Die Ungleichungen $L_1 \geq 0, \dots, L_m \geq 0$ definieren die Punktmenge M . Diese Behauptung ist möglichst einfach zu beweisen.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

285. Man bestimme für jede natürliche Zahl n die höchste Potenz von 2, die in

$$s_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k$$

A. BAGER, Hjørring.

286. Gegeben ist ein Kreis, zwei seiner Punkte A und B und ein Durchmesser POQ . Man soll auf dem Kreis einen Punkt S bestimmen, derart, dass SA und SB den Durchmesser POQ in zwei zum Mittelpunkt O symmetrisch gelegenen Punkten E und F schneiden.

R. SPRANCK, Luxemburg.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Sind die folgenden Identitäten richtig?

$$\text{a) } \frac{40^4 + 51^4 + 91^4}{79^4} = \frac{40^2 + 51^2 + 91^2}{79^2};$$

$$\text{b) } \frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

[Man darf durch «hoch 2» und durch «hoch 3» kürzen!]

2. LEONARDO DA VINCI (1452–1519) vermutete, im gleichschenkligen Trapez sei der Abstand des Schwerpunktes von der längeren Parallelen gleich dem Abstand des Diagonalschnittpunktes von der kürzeren Parallelen. Trifft die Vermutung zu? [Nur für Rechtecke.]

3. Beim Studium der Fallgesetze vermutete GALILEI (1564–1642) zuerst, die Geschwindigkeit v des fallenden Körpers sei in jedem Moment proportional dem zurückgelegten Weg s . Was für ein Gesetz $s = f(t)$ ergäbe sich hieraus? [$s = s_0 e^{kt}$, das heisst, ein ruhender Körper kommt nie in Bewegung.]
4. Wenn eine Klasse beliebige Dreiecke zeichnet und die drei Quadrate konstruiert, deren Ecken auf den Dreiecksseiten liegen, so wird jeder Schüler überzeugt sein, dass er «bei genauem Zeichnen» drei gleiche Quadrate erhalten sollte.
5. Ein Würfel mit der Kante a ist zylindrisch auszubohren. Welches ist der grösstmögliche Durchmesser der Bohrung? [$a\sqrt{2}$.]
Man stelle den Restkörper des Würfels dar.

Vierter österreichischer Mathematikerkongress

Wien, 17. bis 22. September 1956

Am Schlussabend des internationalen Mathematikertreffens in Salzburg 1952 stimmte eine grosse Mehrheit der Teilnehmer dafür, dass der nächste der schon zur schönen Tradition gewordenen österreichischen «Zwischenkongresse» in Wien stattfinden solle. Wien war damals eine besetzte Stadt, und es bedeutete ein gewisses Wagnis, dort einen internationalen Kongress organisieren zu wollen. Inzwischen hat Österreich seine Freiheit wiedererlangt, und auch die Bundeshauptstadt hat die Auswirkungen des Krieges weitgehend überwunden. Wien präsentiert sich heute als moderne, von pulsierendem Leben erfüllte Metropole, der es gelungen ist, nicht nur monumentale Zeugnisse einer grossen Vergangenheit zu erhalten, sondern auch die geistige Tradition als Kulturzentrum an der Grenze von Ost und West zu bewahren.

In diesem grossartigen Rahmen fanden sich etwas mehr als 350 Mathematiker und Mathematikerinnen aus 25 Ländern, zum Teil von Angehörigen begleitet, zusammen, um während einer Woche Gedankenaustausch zu pflegen und neue Anregungen zu empfangen. Fast die Hälfte aller Teilnehmer stammte aus deutschsprachigen Gebieten (Deutschland 31%, Österreich 14%, deutsche Schweiz 2%). Starke Gruppen stellten Italien (10,5%), Ungarn (7%), Frankreich (6,5%) und Jugoslawien (6,5%). Rund ein Fünftel der Teilnehmer kam aus den Oststaaten, und zwar neben einigen prominenten Vertretern der älteren Generation meistens junge Mathematiker. Die hier auf völlig ungezwungene Weise möglichen Begegnungen zwischen Ost und West vermittelten interessante Einblicke in Forschung und Unterricht in diesen Staaten, in denen die Mathematik ja in hoher Blüte steht.

Der Kongress wurde im Rahmen eines Festaktes im Auditorium maximum der Universität durch den Unterrichtsminister und den Bürgermeister eröffnet. Die Vorträge fanden in fünf Hörsälen der Technischen Hochschule am Karlsplatz statt. Das Programm umfasste in fünf Sektionen (Algebra und Zahlentheorie, Analysis, Geometrie, angewandte Mathematik, Philosophie und Geschichte der Mathematik) rund 220 Referate, deren Dauer 20 Minuten nicht übersteigen sollte. Drei prominente Referenten verfügten über eine längere Redezeit, da ihr Thema allgemeineres Interesse beanspruchen konnte. Es ist für die heutige Situation in der Mathematik bezeichnend, dass zwei dieser «Hauptvorträge» in der Sektion «Angewandte Mathematik» gehalten wurden und dort Zuhörer verschiedenster Fachrichtungen vereinigten. Auf den Inhalt der einzelnen Vorträge kann hier nicht eingegangen werden. Auszüge wurden jedem Teilnehmer in einem stattlichen Band am Anfang ausgehändigt (sie sollen in einer Sondernummer der von der österreichischen mathematischen Gesellschaft herausgegebenen «Nachrichten» veröffentlicht werden). So konnte man sich im voraus ein Tagesprogramm machen, dessen Realisierung aber gelegentlich technischen Schwierigkeiten begegnete, wenn ein Wechsel der Sektion notwendig war. In dieser wohl an jedem Kongress wiederkehrenden Situation pflegte man das im Festsaal der Technischen