Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht

Autor(en): **Waerden, B.L. van der**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19205

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XII Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1957

Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht

I

Der Begriff Logarithmus wird von den Schülern im allgemeinen nur sehr schwer verstanden. Die holländischen Schüler zumindest reagieren mit Unwillen auf diesen Begriff. Das habe ich nicht nur als Schüler bei meinen Klassenkameraden beobachten können, sondern es wurde mir von erfahrenen Mathematiklehrern mehrfach bestätigt.

Der Unwille bezieht sich nicht auf das Rechnen mit Logarithmen. Gegen die Formel

$$\log a\, b = \log a + \log b \tag{1}$$

hat man gar nichts: sie ist leicht zu lernen und sehr nützlich. Aber die Lehrer wollen durchaus nicht, dass man die Formel (1) mechanisch anwendet, sondern man muss sie auch verstehen, und dafür muss man die Definition des Logarithmus kennen. Immer wieder ärgert der Lehrer seine Schüler mit Theoriefragen, und immer wieder muss er seufzend feststellen, dass einige Schüler trotz allem noch nicht verstanden haben, was $\log a$ bedeutet. Woran liegt das?

Ich meine, es liegt einfach daran, dass die Schüler recht haben. Zunächst haben sie vom nüchternen, praktischen Standpunkte aus recht. Die Logarithmen sind ein Werkzeug, und Werkzeuge kann man ganz gut benutzen, ohne zu wissen, wie sie gemacht werden.

Hier halte ich einen Augenblick inne, denn ich erwarte lebhaften Widerspruch. Die Mathematik ist nicht nur als Hilfsmittel für Ingenieure da, so wird man sagen. Der Mathematikunterricht dient vor allem dazu, die Schüler zum exakten Denken zu erziehen.

Sehr gut, ganz einverstanden. Aber gerade, wenn wir an diesem hohen Ideal festhalten, müssen wir erkennen, dass unsere Schüler mit ihrer instinktiven Abneigung recht haben, nicht nur vom praktischen, sondern erst recht vom theoretischen Standpunkte aus. Das, was die Schüler so hartnäckig nicht verstehen, nämlich die Definition des Logarithmus, *das kann man nicht verstehen, weil es nicht richtig ist.*

Die Definition lautet, wenn wir uns auf die Zehnerlogarithmen beschränken, so: $\log a$ ist die Lösung der Gleichung

$$10^x = a. \tag{2}$$

Nehmen wir für a eine ganze Zahl, die keine Zehnerpotenz ist, etwa $a = 3$. Ich behaupte: *Wenn wir uns an die Definition der Potenz halten, so wie sie in der Schule gegeben wird, so ist die Gleichung* (2) *unlösbar.*

Nämlich: 10^x ist nur definiert für den Fall $x = \pm m/n$, wo m und n gewöhnliche ganze Zahlen sind. Da in unserem Falle $a > 1$ ist, kommt nur $x = + m/n$ in Betracht. Die Gleichung (2) bedeutet dann

$$10^m = a^n. \tag{3}$$

Die linke Seite von (3) ist gerade, die rechte für $a = 3$ ungerade; also ist (3) für $a = 3$ unmöglich. Auch für $a = 2$ ist (3) unmöglich, denn die linke Seite endigt im Dezimalsystem mit der Ziffer Null und die rechte nicht. Die Gleichung (3) ist in ganzen Zahlen nur dann lösbar, wenn a der Reihe der Zehnerpotenzen $1, 10, 10^2, \ldots$ angehört. Folglich ist die Definition des Logarithmus, so wie sie in der Schule gegeben wird, unhaltbar. Ein Logarithmus im Sinne unserer Definitionen existiert nicht. Wir wollen die Schüler zum exakten Denken erziehen, aber wenn sie wirklich exakt und konsequent denken, so kommen sie darauf, dass wir etwas Unmögliches postuliert haben, nämlich die Lösung der Gleichung (2)!

Man könnte einwenden: Zugegeben, in rationalen Zahlen x ist (2) unlösbar, aber es gibt eine irrationale Lösung $x = \log a$.

Ich antworte: im Sinne der Schuldefinitionen gibt es keine irrationale Lösung, denn für irrationale x ist 10^x gar nicht definiert.

Einwand: So streng kann man in der Schule gar nicht sein. Es kommt öfters vor, dass man Begriffe nicht exakt definiert, zum Beispiel den Begriff Flächeninhalt, weil die exakte Definition für die Schüler zu schwer ist. Es kommt auch vor, dass man Sätze nur für rationale Verhältnisse beweist und sie nachher ohne Beweis auf irrationale Verhältnisse überträgt. Ein gewisser Mangel an Strenge ist im Schulunterricht unvermeidlich.

Meine Antwort: Ich verlange gar nicht, dass alle Begriffe exakt definiert werden. Der Begriff Flächeninhalt ist ein vorwissenschaftlicher Begriff, den die Schüler auch ohne Definition erfassen und der durch die exakten Rechnungen über Flächeninhalte nur verschärft, nicht definiert wird. Man braucht auch nicht alle Sätze exakt zu beweisen. Wenn die Sätze richtig sind und dem Schüler einleuchten, wird er sie sehr gerne ohne Beweis lernen.

Aber beim Logarithmus verhält es sich ganz anders. Was der Schüler hier zu lernen hat, ist nicht von vornherein einleuchtend. Die Definition der Potenz c^x ist nicht eine Präzisierung eines anschaulich schon vorhandenen Begriffes, sondern eine willkürliche Festsetzung:

$$c^{m/n} = \sqrt[n]{c^m}. \tag{4}$$

Wenn man eine solche Definition einführt, so muss man sich auch daran halten. Unterschiebt man nachher einen anderen Begriff der Potenz, den man gar nicht definiert hat (nämlich c^x für beliebige reelle x), so ist das eine Begriffsverwechslung. Man schult das Denken nicht, sondern man verdirbt es.

Gibt es einen Ausweg aus dieser verfahrenen Situation?

Man könnte zunächst daran denken, die richtige Definition der Funktion c^x für reelle x zu geben. Man müsste x durch rationale Zahlen approximieren und so c^x als

Limes erhalten. Um die Sache anschaulich zu machen, würde man die Funktion $y = c^x$ graphisch darstellen, sie zunächst für einige rationale x berechnen und durch die erhaltenen Punkte eine glatte Kurve legen.

Ich glaube, dass dieser Weg praktisch nicht gangbar ist. Diese Definition von c^x ist, auch wenn man über alle Beweise hinweggleitet, zu kompliziert. Kein Schüler würde verstehen, wozu das alles dient. Die Abneigung gegen Potenzfunktion und Logarithmus würde nur noch grösser werden.

Ein anderer Ausweg wäre, nicht den exakten Logarithmus, sondern nur den vier- oder fünfstelligen Logarithmus zu definieren. Die Angabe

$$\log 2 = 0{,}30103$$

würde dann bedeuten

$$10^{0{,}301025} < 2 < 10^{0{,}301035}$$

Der Logarithmus als praktisches Werkzeug könnte in dieser Weise definiert und gerechtfertigt werden, aber man müsste mit in Kauf nehmen, dass zum Beispiel die Formel (1) nicht exakt, sondern nur genähert (mit einem Fehler von höchstens 0,00001) gilt. Ich glaube nicht, dass dieser Weg den Lehrern sympathisch sein wird.

Ein dritter Weg wäre, nicht zu sagen, was ein Logarithmus ist, sondern nur die Formel (1) und ihre Folgerungen

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b\,, \tag{5}$$

$$\log a^r = r \log a \qquad \left(r = \pm \frac{m}{n}\right) \tag{6}$$

zu bringen. Man dekretiert einfach: Es gibt eine Funktion log x, welche die Eigenschaften (1) und

$$\log 10 = 1 \tag{7}$$

hat. Die Mathematiker haben sie definiert, berechnet und tabuliert; die Tafel habt ihr vor euch. Die Definition braucht ihr nicht zu lernen.

Ich glaube, die meisten Schüler wären sehr zufrieden mit dieser Methode, aber die meisten Lehrer nicht. Die Methode gibt nämlich, ebenso wie die vorige, gar keine Einsicht in das Wesen der Logarithmen. Gibt es nichts Besseres?

Ich meine, ja. Im zweiten Teil werde ich darauf zurückkommen.

II

Felix Klein hat einen Weg gewiesen, wie man die Logarithmen einführen kann, indem man vom natürlichen Logarithmus

$$\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x} \tag{1}$$

ausgeht. Ich glaube, dass dieser Weg für den Schulunterricht gangbar gemacht werden kann. Die bisherigen Darstellungen, soweit sie mir bekannt sind, sind allerdings zu kompliziert und setzen zuviel voraus. Ich gebe daher im folgenden eine einfache

Darstellung, mit der man den Versuch einmal machen könnte. Ich selbst habe diesen Aufbau in den letzten 5 Jahren in meiner Vorlesung für Chemiker, Biologen und andere Naturwissenschafter regelmässig vorgetragen. Der Erfolg hat meine Erwartungen übertroffen. In den Übungen und Prüfungen zeigte sich, dass die meisten Studenten die Sache gut verstanden hatten. Einige sagten mir spontan, dass die Methode ihnen besser gefiele als die Schulmethode.

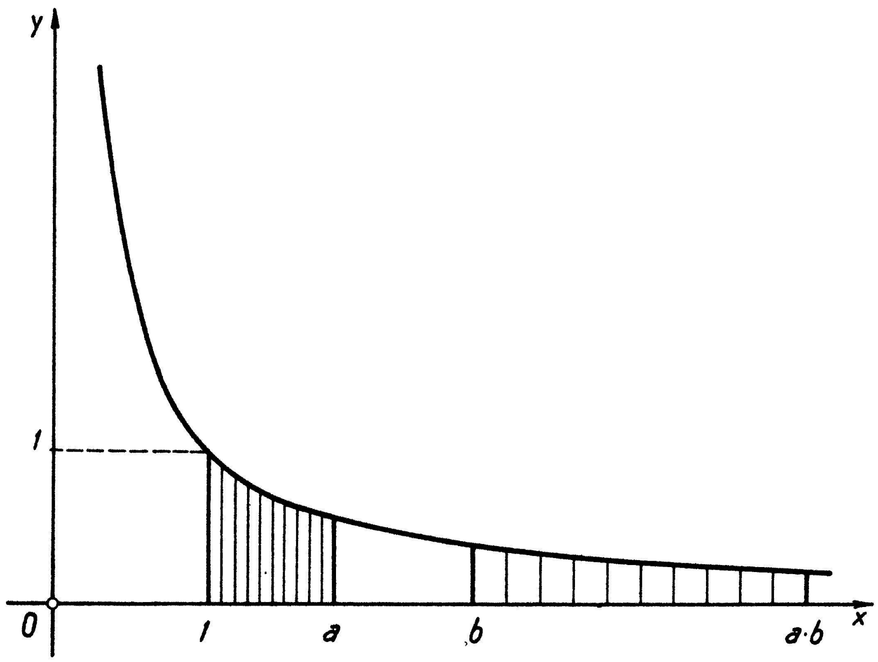
In der Schule kann man natürlich nicht vom Integral ausgehen, wohl aber vom Flächeninhalt, da dieser Begriff als anschaulich klar vorausgesetzt werden kann. Wir zeichnen also die Kurve $y = 1/x$, beschränken uns auf den ersten Quadranten und definieren den ***natürlichen Logarithmus*** $\ln a$ als den Flächeninhalt des krummlinigen Vierecks unter der Kurve und zwischen den senkrechten Geraden $x = 1$ und $x = a$. Ist $a = 1$, so ist der Flächeninhalt Null; ist $a < 1$, so rechnen wir ihn negativ.

Jetzt wollen wir die Formel

$$\ln a\, b = \ln a + \ln b \tag{2}$$

beweisen. Wir führen den Beweis nur für positive Logarithmen, nehmen also $a > 1$ und $b > 1$ an.

Das eben genannte krumme Viereck nennen wir $(1, a)$. Wir dehnen es in der x-Richtung aus, indem wir die Abszissen aller Punkte mit b multiplizieren. Dann ist anschaulich klar, dass der Flächeninhalt auch mit b multipliziert wird. Jetzt pressen wir das Viereck in der y-Richtung zusammen, indem wir die Ordinaten aller



Punkte durch b dividieren. Wenn die Höhen durch b dividiert werden, so wird der Flächeninhalt natürlich auch durch b dividiert. Im Endeffekt bleibt der Flächeninhalt des Vierecks $(1, a)$ bei der Dehnung und Pressung ungeändert.

Das Produkt $x\,y$ bleibt, wenn die x mit b multipliziert und die y durch b dividiert werden, ungeändert. Die Kurve $x\,y = 1$ geht also bei dieser Operation in sich über.

Also geht das Viereck $(1, a)$ in das Viereck $(b, a\,b)$ unter derselben Kurve über, und beide Vierecke haben den gleichen Flächeninhalt:

$$(1, a) = (b, a\,b)\,.$$

Nun addiert man beiderseits $(1, b)$ und erhält

$$(1, a) + (1, b) = (1, a\,b)$$

oder

$$\ln a + \ln b = \ln a\,b\,.$$

Damit ist (2) bewiesen.

Aus (2) folgt leicht

$$\ln a\,b\,c = \ln a + \ln b + \ln c$$

und analog für Produkte aus 4 und mehr Faktoren. Insbesondere gilt

$$\ln a^n = n \cdot \ln a\,. \tag{3}$$

Ersetzt man in (2) a durch a/b, so erhält man

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b\,, \tag{4}$$

insbesondere für $a = 1$ wegen $\ln 1 = 0$

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b\,. \tag{5}$$

Der natürliche Logarithmus $\ln a$ ist nur für positive a definiert. Lässt man a anwachsen, so wächst der Logarithmus; das folgt direkt aus der Definition. Er wächst sogar über alle Grenzen; das folgt aus (3), denn die rechte Seite von (3) kann beliebig gross gemacht werden.

Für $a = 1$ ist $\ln a = 0$. Wird a grösser als 1, so wird $\ln a$ positiv. Wird a nur wenig vergrössert, so wächst $\ln a$ auch nur wenig. Der Logarithmus wächst also nicht sprunghaft, sondern allmählich an. Da er schliesslich über alle Grenzen wächst, so nimmt er jeden positiven Wert c genau einmal an. Wegen (5) nimmt er auch jeden negativen Wert $-c$ an. Da er den Wert 0 ebenfalls annimmt, so folgt: *$\ln x$ nimmt jeden reellen Wert genau einmal an.*

Auf dieser Eigenschaft beruht die Möglichkeit des «Zurücksuchens» von Logarithmen. Wir können es an anhand der ln-Tafel einüben. Dadurch wird der Schüler mit der Umkehrung des Logarithmus so vertraut, dass sie ihm zuletzt ganz selbstverständlich erscheint.

Die ln-Tafel kann auch zum bequemen Wurzelziehen benutzt werden. Aus (3) folgt nämlich, wenn $a = b^{1/n}$ gesetzt wird,

$$\ln b^{1/n} = \frac{1}{n}\ln b\,. \tag{6}$$

Aus (6) folgt weiter, indem man beide Seiten mit m multipliziert

$$\ln b^{m/n} = \frac{m}{n}\ln b\,. \tag{7}$$

Man sieht leicht, dass (7) auch für negative Exponenten $-m/n$ sowie für den Exponenten Null gilt. Also hat man ganz allgemein

$$\ln a^r = r \ln a \qquad \left(r = \pm \frac{m}{n}\right). \tag{8}$$

Jetzt kommt der zweite springende Punkt. Wir *definieren* für beliebige reelle Zahlen s und positive a die Potenzen a^s durch die Formel

$$\ln a^s = s \ln a . \tag{9}$$

Für die Definition (9) ist wesentlich, dass man von vornherein weiss, dass zu jedem Logarithmus eine einzige Zahl gehört. Für solche Zahlen s, die sich in der Form $\pm m/n$ schreiben lassen, ist die neue Definition in Übereinstimmung mit der alten. Die neue Definition ist aber allgemeingültig; sie gilt zum Beispiel auch für $s = \sqrt{2}$.

Damit alles auch für schwache Schüler verständlich bleibt, habe ich die Begriffe Rational und Irrational, die erfahrungsgemäss schwer sind, nicht benutzt. Ich spreche nur von «Zahlen der Form $r = \pm m/n$» und «anderen Zahlen, zum Beispiel $\sqrt{2}$».

Den praktisch veranlagten Schülern wird die Definition (9) insofern sympathisch sein, als sie uns ein Mittel in die Hand gibt, eine Potenz, wie $2^{0,3}$, mit der ln-Tafel schnell zu berechnen. Die Definition (9) ist viel direkter und einfacher als die früher erwähnte, bei der die Zahl s durch rationale Zahlen r approximiert wurde.

Die Rechenregeln für Potenzen

$$a^s a^t = a^{s+t} , \tag{10}$$

$$(a b)^s = a^s b^s , \tag{11}$$

$$(a^s)^t = a^{st} \tag{12}$$

sind sehr leicht zu beweisen. Man bildet immer links und rechts den Logarithmus und stellt fest, dass jeweils links und rechts dasselbe herauskommt.

Wir stellen uns jetzt das Problem, die Gleichung

$$10^x = a \tag{13}$$

zu lösen. Wir bilden auf beiden Seiten von (13) den Logarithmus und finden

$$x \ln 10 = \ln a .$$

Die Lösung von (13) heisst also

$$x = \frac{\ln a}{\ln 10} . \tag{14}$$

Diese Lösung heisst *Zehnerlogarithmus von a*, kurz ${}^{10}\log a$ oder noch kürzer $\log a$. Die Definition des log heisst also

$$\log a = {}^{10}\log a = \frac{\ln a}{\ln 10} . \tag{15}$$

Die Grundeigenschaften des log, nämlich

$$\log a\, b = \log a + \log b\,, \tag{16}$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b\,, \tag{17}$$

$$\log a^s = s \log a\,, \tag{18}$$

$$\log 1 = 0\,, \tag{19}$$

$$\log 10 = 1 \tag{20}$$

folgen unmittelbar aus der Definition (15).

Wenn man will, kann man auch Logarithmen mit beliebiger Basis einführen. Die Definition ist ganz analog:

$$^c\!\log a = \frac{\ln a}{\ln c}\,. \tag{21}$$

Damit wäre der Stoff für die mittleren Klassen wohl erschöpft. In der höchsten Klasse kann man noch einmal an die Definition des ln erinnern und sie als

$$\ln a = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx \tag{22}$$

schreiben. Daraus folgt dann

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}\,; \tag{23}$$

eine Formel, deren Beweis in der traditionellen Differentialrechnung ziemliche Schwierigkeiten bietet.

Will man auch die Exponentialfunktion $y = e^x$ definieren und differenzieren, so muss man zunächst die Basis e einführen. Sie wird am einfachsten durch

$$\ln e = 1 \tag{24}$$

definiert (wir wissen ja, dass zu jedem ln-Wert eine einzige Zahl gehört). Als Spezialfall von (21) hat man nun

$$^e\!\log a = \ln a\,. \tag{25}$$

Ebenso wie der Zehnerlogarithmus die Lösung der Gleichung $10^x = a$ war, so ist der natürliche Logarithmus die Lösung der Gleichung $e^x = a$. Der Beweis ist derselbe wie für den Zehnerlogarithmus.

Die Lösung der Gleichung $e^x = y$ heisst also $x = \ln y$, das heisst, die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion des Logarithmus. Als solche kann man sie auch differenzieren:

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = 1 : \frac{d \ln y}{dy} = 1 : \frac{1}{y} = y = e^x\,. \tag{26}$$

Auch der Beweis der Formel

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{27}$$

ist ganz leicht. Man braucht nur auf beiden Seiten von (27) den ln zu bilden und $x/n = h$ zu setzen; dann reduziert sich die Behauptung auf

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}\, x = x\,. \tag{28}$$

Nun ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$$

einfach die Ableitung des Logarithmus bei Eins, also Eins. Damit ist (28) und daher auch (27) bewiesen. Als Spezialfall von (27) für $x = 1$ folgt die bekannte Formel

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{29}$$

die manchmal als Definition von e benutzt wird.

Aber das sind Zusätze, die man auch dem Hochschulunterricht überlassen kann. Die Hauptsache ist die Definition des Logarithmus vom Flächeninhalt aus. Gerne möchte ich das Urteil der Lehrer darüber vernehmen, ob diese Definition für die Schule brauchbar erscheint. B. L. VAN DER WAERDEN

Nachtrag. In dem Buche von W. BREIDENBACH, *Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht*, 3. Auflage (Verlag Brandstetter, Leipzig 1944), sind die Logarithmen genau so eingeführt wie hier.

Kleine Mitteilungen

Vom Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ [1]

Die übliche Art, die Differentiation der trigonometrischen Funktionen herzuleiten, ist folgende:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right\} \tag{1}$$

oder auch

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right\}. \tag{2}$$

In beiden Fällen braucht man unter anderem den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x/x)$. Man leitet ihn nach uralter Gepflogenheit aus den Ungleichungen $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ für $0 < x < \pi/2$ her. Das geht einwandfrei, wenn man die Integralrechnung schon bis zur Definition und Berechnung der Bogenlänge entwickelt hat. Gewöhnlich aber verwendet man einen anschaulichen Bogenbegriff und entnimmt die Ungleichungen der Anschauung, indem man den Leser oder Hörer damit tröstet, dass mit der Integralrechnung alles in Ordnung kommen wird. Mitunter beruft man sich auch auf die von ARCHIMEDES gelehrte Kreisrektifikation, wogegen folgendes einzuwenden ist: Der Hörer kennt aus der Elementargeometrie die Winkelmessung, etwa in Graden. Führt man das Bogenmass des Winkels ein, dann ist man eigentlich verpflichtet, dem Hörer zu zeigen, dass es dem ihm geläufigen Mass proportional ist. Das geht am einfachsten, indem man die Gültigkeit der Cauchyschen Funktionalgleichung $b(x+y) = b(x) + b(y)$ beweist, wo $b(x)$ das Bogen-

[1] Vortrag auf dem Vierten österreichischen Mathematikerkongress in Wien im September 1956.