Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

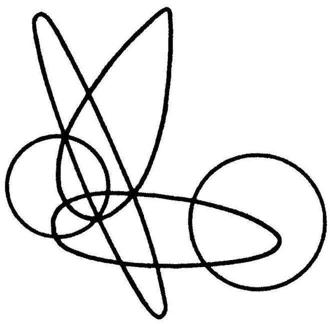
Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

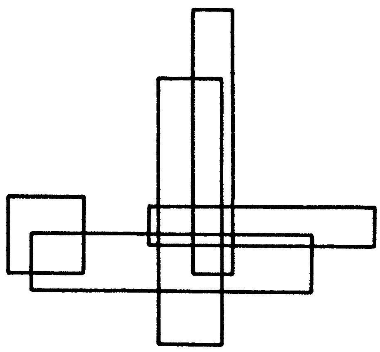
Beispiel zeigt, dass unter dieser schwächeren Voraussetzung die Aussage des Hellyschen Satzes nicht mehr gilt. Dagegen lässt sich die Eibereichsmenge in unserm Beispiel in zwei Teilmengen zerlegen, so dass die Aussage noch für jede einzelne Teilmenge zutrifft. Ist dies immer so? Speziell für parallel liegende Rechtecke ist dies in der Tat der Fall, das heisst, es gilt der folgende Satz:

Lassen sich in je vier beliebig aus einer wenigstens vier Elemente enthaltenden Menge parallel liegender Rechtecke ausgewählten Rechtecken stets wenigstens drei Rechtecke finden, die einen nichtleeren Durchschnitt haben, so lässt sich die Rechtecksmenge in zwei Teilmengen zerlegen, so dass alle ein und derselben Teilmenge angehörenden Rechtecke einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen.

Der Beweis ist sehr einfach und kann dem Leser überlassen werden; man muss



Figur 1



Figur 2

hierbei eine für Rechtecke gültige Verschärfung des Hellyschen Satzes passend anwenden, wonach man die Stichzahl «drei» durch «zwei» ersetzen kann[1]).

Figur 2 illustriert eine den Voraussetzungen unseres Satzes entsprechende Rechtecksmenge, wobei sich auch das Zutreffen der Behauptung leicht ablesen lässt.

Die Frage, ob ein Satz der hier erwogenen Art auch für Mengen beliebiger Eibereiche gilt, wobei die Anzahl der Teilmengen eventuell noch erhöht werden muss, konnte bisher noch nicht geklärt werden.

H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 251. Es ist

$$N(x) = N(x-6) + x$$

und $N(-5) = N(-4) = N(-3) = N(-2) = N(-1) = 0$ und $N(0) = 1$. Man zeige, dass

$$\frac{(x+1)(x+5)}{12} \leqq N(x) \leqq \frac{x^2+6x+12}{12}.$$

Diese Abschätzung ersetzt für ganze Zahlen x eine independente Darstellung von $N(x)$.

R. LAUFFER, Graz.

Lösung: Die Abschätzung ist sinngemäss nur für alle ganzzahligen Werte von x zu verifizieren; bei willkürlicher Vorgabe von Funktionswerten $N(x)$ für $0 < x < 1$ und Fortsetzung mittels der Funktionalgleichung könnte sie nämlich falsch werden.

[1]) Vergleiche hierüber H. HADWIGER und H. DEBRUNNER, *Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene*, Enseign. math. *1955*, Heft 1, 56–89; insbesondere S. 67, Nr. 25.

Nun ist die in der Aufgabe angegebene Abschätzung völlig gleichwertig mit

$$\frac{(x-5)\,(x-1)}{12} \leqq N(x) - x \leqq \frac{(x-5)\,(x-1)+7}{12}\,.$$

Ersetzt man hier $N(x) - x$ durch $N(x-6)$, so ist dies die angegebene Abschätzung für $x-6$ statt für x.

Die Abschätzung ist also richtig für $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0$, wie das Einsetzen dieser Werte zeigt, ferner stets zugleich für x und $x-6$. Durch vollständige Induktion nach steigenden wie nach fallenden x folgt die Behauptung für alle ganzen Zahlen. A. BAGER, Hjørring, H. DEBRUNNER, Bern

Aufgabe 252. Man denke sich die Wurzeln der Gleichung

$$z^3 + 12\,(1 + i\sqrt{3})\,z + A = 0$$

als Punkte in der komplexen Ebene abgebildet. Für welche Werte von A liegen diese Punkte auf einer Geraden? M. G. BEUMER (Enschede, Holland).

Lösung: Die drei Lösungen der angegebenen Gleichung liegen in der komplexen Ebene dann und nur dann linear, wenn A reell ist und zugleich $|A| \leqq 32\sqrt{2}$ erfüllt ist. Allgemeiner gilt, dass die kubische Gleichung

$$z^3 + a\,z \operatorname{cis}\alpha + b \operatorname{cis}\beta = 0 \quad (a,\, b \geqq 0) \tag{1}$$

dann und nur dann Lösungen besitzt, die in der komplexen Ebene linear liegen, wenn $b \leqq \sqrt{4\,a^3/27}$ und $2\,\beta \equiv 3\,\alpha + \pi \pmod{2\,\pi}$ gilt.

In der Tat: Da in (1) der Koeffizient von z^2 verschwindet, liegt der Schwerpunkt $(z_1 + z_2 + z_3)/3$ des von den Lösungen z_i $(i = 1, 2, 3)$ gebildeten Dreiecks im Ursprung O. Liegen diese Lösungen auf einer Geraden, so geht diese also durch O; φ sei die Phase des einen Teilstrahls. Setzt man $z = x \operatorname{cis}\varphi$, so werden alle Lösungen der transformierten Gleichung $x^3 + a\,x \operatorname{cis}(\alpha - 2\,\varphi) + b \operatorname{cis}(\beta - 3\,\varphi) = 0$ reell, daher auch die Koeffizienten. Insbesondere gilt dann

$$\alpha - 2\,\varphi = m\,\pi \quad \text{und} \quad \beta - 3\,\varphi = n\,\pi \quad (m,\, n \text{ ganz}). \tag{2}$$

Dies eingesetzt liefert $x^3 + (-1)^m a\,x = (-1)^{n+1} b$. Nun nimmt die reelle Funktion $x^3 + a\,x = y$ $(a > 0)$ jeden Wert y nur einmal an, ebenso $x^3 - a\,x = y$ $(a \geqq 0)$ jeden Wert y mit $|y| > \sqrt{4\,a^3/27}$. Drei reelle Wurzeln hat also unsere Gleichung nur, wenn m ungerade und $b \leqq \sqrt{4\,a^3/27}$ ist. Aus (2) folgt überdies, wie behauptet, $2\,\beta - 3\,\alpha \equiv m\,\pi \pmod{2\,\pi}$.

Da sich der Gedankengang auch rückwärts verfolgen lässt, sind die angegebenen Bedingungen notwendig und hinreichend. H. DEBRUNNER, Bern.

Weitere richtige Lösungen sandten L. KIEFFER (Luxemburg), H. SCHILT (Biel) und J. VIGASSI (Budapest).

Aufgabe 253. Démontrer pour $-\pi < x < \pi$

$$\frac{\sin 2\,x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\sin 3\,x}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 4\,x}{3\cdot 4\cdot 5} - \cdots = x \cos^2 \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{4}\sin x\,.$$

H. BREMEKAMP, Delft

Lösung: (Sämtliche Summen werden von $k = 2$ bis $k = \infty$ erstreckt.)

$$\sum (-1)^k \frac{\sin k\,x}{(k-1)\,k\,(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum (-1)^k \frac{\sin k\,x}{k-1} + \frac{1}{2}\sum (-1)^k \frac{\sin k\,x}{k+1} - \sum (-1)^k \frac{\sin k\,x}{k}$$

$$
= \left\{ \begin{array}{l}
\frac{\cos x}{2} \sum (-1)^k \frac{\sin (k-1)\, x}{k-1} + \frac{\sin x}{2} \sum (-1)^k \frac{\cos (k-1)\, x}{k-1} \\
+ \frac{\cos x}{2} \sum (-1)^k \frac{\sin (k+1)\, x}{k+1} - \frac{\sin x}{2} \sum (-1)^k \frac{\cos (k+1)\, x}{k+1} \\
- \sum (-1)^k \frac{\sin k\, x}{k}
\end{array} \right.
$$

$$
= -(1+\cos x) \sum (-1)^k \frac{\sin k\, x}{k} + \cos x \sin x + \frac{1}{4} \sin (2\, x - x)
$$

$$
= -(1+\cos x)\, \mathfrak{J} \{e^{i x} - \ln (1 + e^{i x})\} + \cos x \sin x + \frac{1}{4} \sin x
$$

$$
= -(1+\cos x) \left(\sin x - \frac{x}{2}\right) + \cos x \sin x + \frac{1}{4} \sin x
$$

$$
= x \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sin x .
$$

R. LAUFFER, Graz

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring) und R. WHITEHEAD (Camborne, England).

Aufgabe 254. Man berechne die Determinante $|g_{ik}|$, wo

$$
g_{ik} = \frac{a\, x_i - b\, y_k}{x_i - y_k} \qquad (x_i \neq y_k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n).
$$

E. TROST, Zürich

Lösung: Die Determinante hat den Wert

$$
D = (-1)^{n(n-1)/2} (a-b)^{n-1} (a\, x_1 x_2 \cdots x_n - b\, y_1 y_2 \cdots y_n)
$$
$$
\prod_{i<k} (x_i - x_k)(y_i - y_k) \prod_{i,k} (x_i - y_k)^{-1} .
$$

Das ergibt sich folgendermassen: D verschwindet für $x_i = x_k$ und für $y_i = y_k$, ferner von $(n-1)$-ter Ordnung für $a = b$ ($g_{ik} - g_{1k}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, enthält den Faktor $a - b$). Der Nenner ist vom Grad n^2 in x_i und y_k, also bleibt im Zähler neben den Faktoren

$$
(a-b)^{n-1} \prod_{i<k} (x_i - x_k)(y_i - y_k)
$$

noch eine in a, b lineare und homogene Funktion $a\, f_1 + b\, f_2$, wo f_1 und f_2 homogen und vom n-ten Grad in x_i, y_k sind. Da für $b = 0$ der Zähler durch $x_1 x_2 \cdots x_n$ teilbar wird, ist $f_1 = c_1 x_1 x_2 \cdots x_n$ und analog ergibt sich $f_2 = c_2 y_1 y_2 \cdots y_n$. Gleichzeitige Vertauschung von x_i mit y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) und a mit b ändert D nicht. Der Nenner multipliziert sich mit $(-1)^n$ und $(a-b)^{n-1}$ mit $(-1)^{n-1}$, während

$$
\prod_{i<k} (x_i - x_k)(y_i - y_k)
$$

unverändert bleibt, also wechselt $a\, f_1 + b\, f_2$ nur das Vorzeichen, das heisst $c_2 = -c_1 = -c$. Um schliesslich noch c zu bestimmen, berechnen wir das Produkt

$$
D \prod (x_i - y_i)
$$

für den Grenzfall $y_i \to x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auf zwei Arten, wobei noch $b = 0$ gesetzt werde. In der Determinante selbst wird nur die Hauptdiagonale einen von Null verschiedenen Beitrag liefern, und zwar $a^n x_1 x_2 \cdots x_n$. Der oben gefundene Ausdruck dagegen liefert

$$\prod_{i<k} (x_i - x_k)^2 \, a^n \, c \, x_1 x_2 \cdots x_n \prod_{i \neq k} (x_i - x_k)^{-1} .$$

Da aber

$$\prod_{i \neq k} (x_i - x_k) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2 ,$$

so wird $c = (-1)^{n(n-1)/2}$. Damit ergibt sich der oben angegebene Wert.

C. Bindschedler, Küsnacht

Eine ähnliche Lösung sandte R. Lauffer (Graz).

Aufgabe 255. Ein Faden der Länge L wird in zwei Teile zerschnitten. Aus den Teilstücken werden zwei Kurven $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2)$ gebildet, die zu den ebenen doppelpunktfreien geschlossenen Kurven C_i mit dem Umfang U_i und dem Flächeninhalt F_i ähnlich sind. Wie lang sind die beiden Teilstücke, wenn die Summe der Flächeninhalte von $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ minimal sein soll? R. Rose, Saarbrücken

Lösung: Sind x_1 und x_2 die Längen der Teile, dann ist $x_1 + x_2 = L$ und

$$F = \frac{F_1 x_1^2}{U_1^2} + \frac{F_2 x_2^2}{U_2^2} = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 = \text{Min.}$$

Die Extremalbedingung ist $k_1 x_1 - k_2 x_2 = 0$. Hieraus folgt

$$x_1 = \frac{L k_2}{k_1 + k_2} = \frac{L F_2 U_1^2}{F_1 U_2^2 + F_2 U_1^2}, \quad x_2 = \frac{L k_1}{k_1 + k_2} = \frac{L F_1 U_2^2}{F_1 U_2^2 + F_2 U_1^2} .$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte $k_1 x_1^2 : k_2 x_2^2$ ist im Fall des Minimums gleich dem Verhältnis der Umfänge $x_1 : x_2$. R. Lauffer, Graz

Aufgabe 256. Man zeige, dass für die reellen Wurzeln des Systems

$$\left\{ \begin{aligned} (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 &= 49, \\ (x-11)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 &= 49, \\ 19\,x - 28\,y - 6{,}5\,z &= 0, \end{aligned} \right.$$

gilt:

$$x_1 + x_2 = 16; \quad y_1 + y_2 = 9; \quad z_1 + z_2 = 8 .$$

W. Lüssy, Winterthur

Solution: The system is of the following form:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2, \tag{1}$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = R_2^2, \tag{2}$$

$$A\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + B\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + C\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0 . \tag{3}$$

The section of the equal spheres (1) and (2) is a circle K with centre

$$K_c\left(x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

The plan (3) passes through K_c and cuts therefore K in two points M' (x', y', z') and M'' (x'', y'', z'') – the real roots of this system – lying at the ends of the same diameter. Therefore:

$$x_c = \frac{x' + x''}{2}, \quad y_c = \frac{y' + y''}{2}, \quad z_c = \frac{z' + z''}{2}.$$

G. VLAHAVAS, London

Weitere Lösungen sandten N A. VAN ARKEL (Den Haag), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), H. SCHILT (Biel), J. SCHOPP (Budapest), R. WHITEHEAD (Camborne, England).

Aufgabe 257. Gegeben sei eine reelle Zahl $\alpha > 1$, eine Folge nichtnegativer Zahlen p_n, $n = 1, 2, \ldots$, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ divergiert, und das System der Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\, x_\nu^\alpha \leqq x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit nichtnegativen x_ν als Unbekannten. Wenn alle x_ν verschwinden, sind sämtliche Ungleichungen erfüllt; dies ist die triviale Lösung des Systems. Gibt es noch andere Lösungen?

A. PFLUGER, Zürich

Lösung des Aufgabenstellers: Nein!

Beweis: Setze

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\, x_\nu^\alpha = y_n .$$

Dann ist $y_n - y_{n-1} = p_n\, x_n^\alpha$, $y_n \leqq x_n$ und daher

$$p_n\, y_n^\alpha \leqq y_n - y_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots) . \tag{1}$$

Nehmen wir nun an, es gäbe noch eine andere als die genannte triviale Lösung. Dann sind von einem gewissen Index an sämtliche y_n positiv, $y_n > 0$ für $n \geqq k$. Nun ist

$$x_0^{1-\alpha} - x_1^{1-\alpha} \geqq (\alpha - 1)\, x_1^{-\alpha}\, (x_1 - x_0)\ ^{1)}$$

für $\alpha > 1$, $x_1 \geqq x_0 > 0$. Daraus folgt in Verbindung mit (1)

$$(\alpha - 1)\, p_n \leqq (\alpha - 1)\, y_n^{-\alpha}\, (y_n - y_{n-1}) \leqq y_{n-1}^{1-\alpha} - y_n^{1-\alpha}$$

für $n > k$. Die Summation dieser Ungleichungen ergibt

$$(\alpha - 1) \sum_{k+1}^{k+m} p_n \leqq y_k^{1-\alpha} - y_{k+m}^{1-\alpha} < y_k^{1-\alpha}$$

für beliebige m, was offenbar der Divergenz der Reihe widerspricht.

Eine weitere Lösung sandte C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

---

[1]) Die Richtigkeit dieser Ungleichung folgt leicht aus der Tatsache, dass für die Potenzfunktion $y = x^{\alpha-1}$ die Tangentensteigung im Punkt mit der Abszisse x_0 kleiner ist als die Steigung einer Sekanten, deren zweiter Schnittpunkt eine Abszisse $x_1 > x_0$ hat (Red.).

Neue Aufgaben

287. Prove that the number of odd binomial coefficients of any order is a power of 2.
LEO MOSER, Edmonton (Kanada)

288. Sei k ein Kegelschnitt und k' ein ihn doppelt berührender Kreis, P ein laufender Punkt von k und P' einer der beiden Schnittpunkte der zugehörigen Kegelschnitttangente mit dem Kreis k'. Man zeige, dass ein bestimmter Brennstrahl durch P mit dem Kreisdurchmesser durch P' einen Winkel unveränderlicher Grösse bildet.
W. WUNDERLICH, Wien

289. Man beweise: Sind a, b, c, d, k natürliche Zahlen und gilt $ab = cd$, so ist

$$m = a^k + b^k + c^k + d^k$$

keine Primzahl. R. PACHER, Graz

290. Trägt man auf den Normalen einer ebenen Kurve c das λ-fache des zugehörigen Krümmungsradius auf, so erhält man eine Kurve c_λ, die sogenannte λ-Zwischenevolute von c [G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, deutsch von F. SCHÜTTE (Leipzig 1911), II, S. 273]. Durch Variieren von λ entsteht eine einparametrige Kurvenschar $\{c_\lambda\}$, der naturgemäss die Ausgangskurve c $(\lambda = 0)$ und ihre Evolute $(\lambda = 1)$ angehören. Zeichnet man sodann in jenen Punkten der Kurven c_λ, die zur selben Normalen der Ausgangskurve gehörenden Tangenten und Normalen, so erhält man zwei einparametrige Geradenscharen. Bestimme deren Einhüllenden!
E. BEREIS, Wien

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Einem regulären Fünfeck mit der Seite a ist ein Quadrat so einbeschrieben, dass zwei Quadratseiten einer Fünfeckseite parallel sind. Berechne die Quadratseite x.
$\left[x = a\,\dfrac{\operatorname{ctg} 18^\circ}{1 + 2\cos 18^\circ}\,.\right]$
2. Ein veränderliches reguläres Sechseck hat eine feste Ecke A und sein Mittelpunkt bewegt sich auf einer Gerade g. Zeige, dass sich die anderen Ecken auch auf Geraden bewegen, die durch einen festen Punkt gehen.
[Nämlich durch den symmetrischen Punkt von A bezüglich g.]
3. Konstruiere das reguläre Sechseck $ABCDEF$, wenn die Ecken $A(6; 5; 0)$ und C (11; 0; 3) bekannt sind und die Ecke B in Π_1 liegt.
[B_1 (7,883; 0,983; 0), B_2 (10,02; 3,12; 0).]
4. Im regulären Siebeneck $ABCD\ldots$ gilt

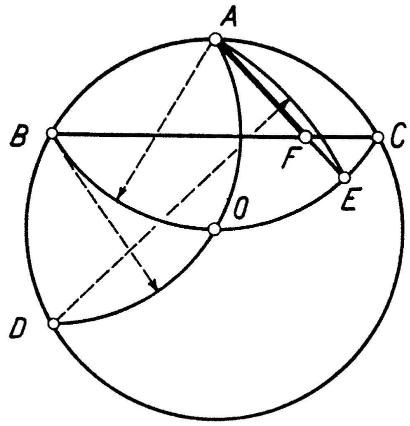
$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\,.$$

Im regulären Neuneck $ABCD\ldots$ gilt

$$AB = AE - AC\,.$$

[Wende den Satz von PTOLEMÄUS im ersten Fall auf das Viereck $ACDE$, im zweiten auf das Viereck $ACDG$ an.]

5. Herr FRITZ FRONEK, Schüler der Bundesgewerbeschule in Steyr, teilt folgende einfache, meines Wissens neue, Näherungskonstruktion für das reguläre Neuneck mit.



Man zieht um den Punkt A des gegebenen Umkreises $(O; r)$ den Bogen BOC, um B den Bogen AOD, um D den Bogen AE. Die Sehnen BC und AE schneiden sich in F. Die Strecke $AF = x$ ist mit grosser Näherung gleich der gesuchten Neuneckseite.

$\left[x = r\,\dfrac{\sqrt{33}-3}{4}\right.$; der Fehler beträgt $3\,^0/_{00}$.]

Berichte

Bericht über die 60. Jahresversammlung des
Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer
in Lugano, 20. Oktober 1956

Zusammenfassung

In der Nachmittagssitzung hielt Herr Prof. Dr. R. NEVANLINNA einen glänzenden Vortrag *Über neuere Probleme der Funktionentheorie.* Anschliessend kam als wesentlichstes Traktandum der Geschäftssitzung eine erste Diskussion über das Minimalprogramm des Mathematikunterrichts in Gang. Nach dem gemeinsamen Nachtessen, an dem etwa 50 Kollegen teilnahmen, wurden die laufenden Vereinsangelegenheiten, vor allem die verschiedenen Berichte, erledigt, und zum Schluss hielt P. Dr. S. HOTZ, Ascona, eine auch didaktisch interessante Plauderei über *Feldtheoretische Ableitung der Gesetze von Biot-Savart und von Ampère.*

Geschäftssitzung des VSM

Der Bericht des Präsidenten wurde einstimmig genehmigt, ebenso, auf Vorschlag der Rechnungsrevisoren, derjenige des Kassiers, dem zu entnehmen ist, dass eine Erhöhung des Mitgliederbeitrags bald ins Auge gefasst werden muss. Die Berichte der Präsidenten der Lehrmittelkommissionen (deutsch und französisch) zeugen von einem normalen Fortschreiten dieses wichtigen Tätigkeitsgebietes unseres Vereins. Herr A. ORY, Biel, wurde zum Nachfolger des verstorbenen Kollegen H. JOBIN gewählt.

14 neue Mitglieder konnten aufgenommen werden.

Minimalprogramm für den Mathematikunterricht

Einleitend fasste der Präsident die Vorgeschichte der nachfolgenden Diskussion zusammen. Einerseits hatte der Vorstand des VSM im Herbst 1955 in Baden den Auftrag erhalten, ein Minimalprogramm für den Mathematikunterricht auszuarbeiten, wie das