

# Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe

Autor(en): **Kirschmer, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 3

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19209>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.

Band XII

Nr. 3

Seiten 49–72

Basel, 10. Mai 1957

---

## Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe

### Einleitung

In der verhältnismässig jungen Geschichte der Gruppentheorie sind durch sie schon zahlreiche neue Einblicke in die Struktur und in die Ordnungsprinzipien der Mathematik gewonnen worden, und manche wichtige Entdeckung und Weiterentwicklung in verschiedenen mathematischen Disziplinen wären ohne sie gar nicht möglich gewesen. Auch in den elementaren Bereichen der Mathematik nimmt die Gruppentheorie längst einen stets breiter werdenden Raum ein.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Gruppe aufgezeigt, deren Elemente Zahlentripel sind und deren Gruppenmultiplikation aus elementaren Beziehungen besteht. Diese Gruppe ist vielseitig deutbar, zeigt viele Zusammenhänge auf und bietet verschiedene Anwendungsmöglichkeiten.

### § 1. Definition der Gruppe

1. Die Elemente der Gruppe sind die Zahlentripel

$$A [a_1; a_2; a_3], \quad B [b_1; b_2; b_3], \dots, \quad (1)$$

die den Bedingungen

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2, \quad b_1^2 = b_2^2 + b_3^2, \dots \quad (2)$$

genügen, wobei stets

$$a_3 \neq 0, \quad b_3 \neq 0, \dots \quad \text{oder} \quad a_3 b_3 \cdots \neq 0 \quad (3)$$

vorausgesetzt wird. Die Tripelelemente  $a_i, b_i, \dots$  ( $i = 1, 2, 3$ ) können reelle oder komplexe Zahlen sein.

Die Verknüpfungsvorschrift oder Gruppenmultiplikation zweier Gruppenelemente  $A$  und  $B$  lautet

$$A B \equiv [a_1; a_2; a_3][b_1; b_2; b_3] = [a_1 b_1 + a_2 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1; a_3 b_3]. \quad (4)$$

Dieses neue Zahlentripel, das «Produkt» von  $A$  und  $B$ , erfüllt ebenfalls die Bedin-

gungen (2) und (3), denn aus

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 + a_3^2 b_3^2$$

folgt durch Rechnung

$$(a_1^2 - a_2^2) (b_1^2 - b_2^2) = a_3^2 b_3^2,$$

und mit (2) entspricht dies der geforderten Bedingung; ausserdem ist mit  $a_3 b_3 \neq 0$  auch  $a_3^2 b_3^2 \neq 0$ .

Ist umgekehrt ein Tripel  $A$  und sein Produkt  $P[p_1; p_2; p_3]$  mit einem unbekanntem Tripel  $X[x_1; x_2; x_3]$  bekannt, so ist dieses Tripel  $X$  bestimmbar aus dem Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 &= p_1 \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 &= p_2 \\ a_3 x_3 &= p_3 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

dessen Hauptdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1^2 a_3 - a_2^2 a_3 = a_3 (a_1^2 - a_2^2) = a_3^3 \quad (6)$$

wegen (3) stets von Null verschieden ist. Also ist das Gleichungssystem (5) immer nach den  $x_i$  auflösbar.

2. Das Assoziativgesetz als notwendige Gruppeneigenschaft für drei Elemente  $A$ ,  $B$  und  $C$  ist erfüllt.  $A B$  ist mit (4) definiert. Dieses Produkt noch mit  $C [c_1; c_2; c_3]$  multipliziert, ergibt

$$\left. \begin{aligned} (A B) C &\equiv [(a_1 b_1 + a_2 b_2) c_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_2; (a_1 b_1 + a_2 b_2) c_2 \\ &\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_1; a_3 b_3 c_3] \\ &= [a_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) + a_2 (b_1 c_2 + b_2 c_1); a_1 (b_1 c_2 + b_2 c_1) \\ &\quad + a_2 (b_1 c_1 + b_2 c_2); a_3 b_3 c_3] \\ &\equiv A (B C) = A B C. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. Für die Gruppe ist ein eindeutiges Einheitselement  $E$  durch (5) so festgelegt, dass das Produkt  $A E$  und das Produkt  $E A$  das Ergebnis  $A$  ergibt. Um  $E$  zu bestimmen, ist in (5) für  $P$  das Element  $A$  zu setzen, und die elementare Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 &= a_1 \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 &= a_2 \\ a_3 x_3 &= a_3 \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

ergibt das Einheitsselement

$$E[1; 0; 1]. \quad (8)$$

Für  $E$  trifft sowohl (2) als auch (3) zu.

Die Gegenprobe  $A E$  und  $E A$  nach der Vorschrift (4), die  $A$  ergeben muss, bleibe dem Leser überlassen.

4. Als letzte notwendige Forderung für den Charakter einer Gruppe wird zu einem beliebigen Tripel  $A$  das inverse Tripel  $A^{-1}$  bestimmt, und zwar ebenfalls mit Hilfe des Gleichungssystems (5), wobei für  $P$  das Einheitsselement  $E$  eingesetzt wird. Die elementare Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 = 1 \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ a_3 x_3 = 1 \end{array} \right\} \quad (5'')$$

ergibt für das inverse Element  $A^{-1}$  die wegen (3) eindeutige Lösung

$$A^{-1} \left[ \frac{a_1}{a_3^2}; -\frac{a_2}{a_3^2}; \frac{1}{a_3} \right]. \quad (9)$$

Die einfache Gegenprobe  $A A^{-1} = A^{-1} A = E$  nach der Formel (4) möge wiederum der Leser bestätigen.

## § 2. Einfachste Eigenschaften der Gruppe und ihrer Elemente

1. Aus der Verknüpfungsvorschrift (4) folgt

$$A B = B A, \quad (10)$$

das heisst, die Gruppe ist kommutativ oder abelsch.

2. Mit der Voraussetzung (3), also mit  $a_3 \neq 0$ , ist wegen (2) jedes Tripel der Form  $[0; 0; a]$ ,  $[0; a; 0]$ ,  $[a; 0; 0]$ ,  $[0; 0; 0]$  ( $a \neq 0$ ) ausgeschlossen.

3. Für jedes einzelne Tripel gilt die Homogenitätsbedingung

$$[k a_1; k a_2; k a_3] \equiv k [a_1; a_2; a_3]. \quad (11)$$

Insbesondere kann man wegen (11) und (3) jedes Tripel so umformen:

$$[a_1; a_2; a_3] \equiv a_3 \left[ \frac{a_1}{a_3}; \frac{a_2}{a_3}; 1 \right]. \quad (11')$$

4. Mit dem Tripel  $A [a_1; a_2; a_3]$  gehört auch das Tripel  $(\pm a_1; \pm a_2; \pm a_3]$  mit beliebiger Wahl des Vorzeichens zur Gruppe.

Ferner sind mit  $A$  weitere Gruppenelemente die Tripel

$$[a_1; a_3; a_2], \quad [a_2; a_1; i a_3], \quad [a_2; i a_3; a_1], \quad [a_3; a_1; i a_2], \quad [a_3; i a_2; a_1]$$

$$(i^2 = -1),$$

zusammen mit den soeben erwähnten frei wählbaren Vorzeichen, natürlich nur, soweit diese Kombinationen der Bedingung (3) genügen. Durch das Gleichungssystem (5) sind alle diese Tripel eineindeutig ineinander überführbar.

Diese Eigenschaft ist bei den Anwendungen mitunter sehr nützlich.

5. Die Einsicht in die Struktur der Gruppe wird erhöht durch folgende elementare Umformung von (4):

$$A B \equiv [a_1 b_1 + a_2 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1; a_3 b_3]$$

$$= \left. \begin{aligned} &= \left[ \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) + (a_1 - a_2) (b_1 - b_2) \}; \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) - (a_1 - a_2) (b_1 - b_2) \}; a_3 b_3 \right], \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

das heisst, es werden zur Gruppenmultiplikation die Summen und die Differenzen der ersten beiden Tripelzahlen benutzt. Für mehrere Tripel ergibt das

$$A B C \dots = \left. \begin{aligned} &= \left[ \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) (c_1 + c_2) \dots + (a_1 - a_2) (b_1 - b_2) (c_1 - c_2) \dots \}; \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) (c_1 + c_2) \dots - (a_1 - a_2) (b_1 - b_2) (c_1 - c_2) \dots \}; \right. \\ &\quad \left. a_3 b_3 c_3 \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4'')$$

6. Die «Potenz»  $A^n$  eines Gruppenelementes  $A$  lässt sich mit (4) sukzessiv ausrechnen. Der Leser möge die Folge  $A^2, A^3, A^4, \dots$  selbst aufstellen. Dabei wird er erkennen, dass eine Vereinfachung der Darstellung gar nicht so leicht ist.

Viel einfacher geht es freilich mit der in Ziffer 5 dieses Paragraphen aufgestellten Formel (4''), denn nach ihr ist für  $A [a_1; a_2; a_3]$

$$A^n \equiv \left[ \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2)^n + (a_1 - a_2)^n \}; \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2)^n - (a_1 - a_2)^n \}; a_3^n \right]. \quad (12)$$

### § 3. Untergruppen der Gruppe

1. Mit  $A [a; 0; a]$ ,  $B [b; 0; b]$ , ..., wo die  $a, b, \dots$  reelle Zahlen sind, sind diese selbst und die gewöhnliche Zahlenmultiplikation definiert. Denn nach (4) ist

$$A B \equiv [a b; 0; a b].$$

Damit ist aber schon der notwendige Nachweis für die Untergruppe geführt und gleichzeitig die Behauptung bewiesen. Vielleicht lässt es sich noch einfacher zeigen mit der Homogenitätsbedingung (11). Nach ihr ist  $[a; 0; a] = a [1; 0; 1] = a E$ , ähn-

lich  $[b; 0; b] = b E$  usw. Nun ist aber

$$a E \cdot b E = a b E^2 = a b E,$$

und das ist dasselbe wie oben.

2. Die Gruppenelemente sollen die Form  $A[a_1; i a_2; a_3], B[b_1; i b_2; b_3], \dots$  mit reellen  $a_1, a_2; b_1, b_2; \dots$  und positiven  $a_3, b_3, \dots$  haben, wobei  $i$  die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$  ist. Diese Elemente bilden ebenfalls eine Untergruppe. Zum Nachweis genügt wiederum, dass auch  $AB$  die verlangte Form besitzt. In der Tat ist

$$AB \equiv [a_1 b_1 - a_2 b_2; i(a_1 b_2 + a_2 b_1); a_3 b_3]$$

ebenfalls von der gewünschten Form. Der Leser wird bereits erkannt haben, dass mit diesen Elementen die komplexen Zahlen  $a_1 + i a_2, \dots$  mit ihrem Betrag

$$a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \dots$$

definiert sind. Das Produkt  $AB$  der Untergruppe ist nichts anderes als die komplexe Zahl, die das gewöhnliche Produkt der beiden komplexen Zahlen  $a_1 + i a_2, b_1 + i b_2$  darstellt.

Eine Zerlegung der Untergruppen von Ziffer 1 und 2 dieses Paragraphen in weitere Untergruppen ist an dieser Stelle nicht angebracht, da sie in allen Einführungen in die Gruppentheorie behandelt wird.

3. Eine weitere aufschlussreiche Untergruppe setzt sich aus den Elementen der Form  $A[a_1; a_2; 1], B[b_1; b_2; 1], \dots$  zusammen. Das Produkt

$$AB \equiv [a_1 b_1 + a_2 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1; 1]$$

ist, da von derselben Form, ein Element der Untergruppe. Hier ist vielleicht der Hinweis angebracht, dass sowohl  $E[1; 0; 1]$  als auch das inverse Element nach (9)

$$A^{-1}[a_1; -a_2; 1]$$

automatisch von der verlangten Form sind.

4. Den Abschluss der Beispiele für Untergruppen der vorgelegten Gruppe sollen einige beliebig zu vermehrende endliche zyklische Untergruppen bilden:

Ordnung 2:  $A[-1; 0; 1], A^2[1; 0; 1] = E.$

Ordnung 3:  $A\left[-\frac{1}{2}; \frac{i}{2}\sqrt{3}; 1\right], A^2\left[-\frac{1}{2}; -\frac{i}{2}\sqrt{3}; 1\right], A^3[1; 0; 1] = E.$

Ordnung 4:  $A[0; i; 1], A^2[-1; 0; 1], A^3[0; -i; 1], A^4[1; 0; 1] = E.$

.....

Ordnung 12:  $A\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{i}{2}; 1\right], A^2\left[\frac{1}{2}; \frac{i}{2}\sqrt{3}; 1\right], \dots, A^{12}[1; 0; 1] = E.$

Die Quelle dieser Beispiele wird der Leser, falls er sie nicht längst erkannt hat, im nächsten Paragraphen, Ziffer 3, finden.

#### § 4. Anwendungen und weitere Untergruppen

Aus der Fülle der Anwendungsmöglichkeiten werden ein paar willkürlich herausgegriffen und skizziert. Die systematische Durchführung bleibt dem interessierten Leser überlassen, sie würde den Rahmen dieses Aufsatzes sprengen. Doch vermag die Auswahl gewiss die Vielseitigkeit dieser Gruppe klarzumachen.

1. Das Problem der Pythagoräischen Zahlen, das sind ganzzahlige Zahlentripel, die der Bedingung (2) genügen, hat sich schon immer besonderer Anziehungskraft unter den Liebhabern elementarer mathematischer Probleme erfreut. Die Literatur darüber ist umfangreich. Erst jüngst ist sie wieder durch einige Neuerscheinungen wesentlich bereichert worden<sup>1)</sup>. Hier soll nicht über das Problem und die bisher erzielten Ergebnisse berichtet, sondern nur der Weg zur Aufdeckung einiger neuer Zusammenhänge mit Hilfe unserer Gruppe angedeutet werden.

Hat man ein beliebiges Pythagoräisches Zahlentripel  $[a_1; a_2; a_3]$ , so sind die Potenzen mit positiven ganzzahligen  $n$  nach (12)

$$A^n \equiv \left[ \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2)^n + (a_1 - a_2)^n \}; \frac{1}{2} (a_1 + a_2)^n - (a_1 - a_2)^n; a_3^n \right]$$

ebenfalls Pythagoräische Zahlentripel. Das sieht man noch klarer, wenn man die Potenzen einzeln nach (4) berechnet.

Gewöhnlich wird zur Erzeugung von Pythagoräischen Zahlentripeln als einfachst mögliches Tripel

$$\left[ \frac{1}{2} (u^2 + v^2); \frac{1}{2} (u^2 - v^2); uv \right] \quad (13)$$

benützt, wo  $u$  und  $v$  ( $u > v$ ) teilerfremde ganze positive ungerade Zahlen sind. Die Rechnung ergibt für die  $n$ -te Potenz von (13)

$$\left[ \frac{1}{2} (u^{2n} + v^{2n}); \frac{1}{2} (u^{2n} - v^{2n}); u^n v^n \right].$$

Nach den Voraussetzungen sind alle Potenzen mit positiven ganzzahligen  $n$  Pythagoräische Zahlentripel. Lässt man für ein beliebiges Zahlenpaar  $u, v$ , das den oben angegebenen Voraussetzungen genügt,  $n$  von 0 an alle natürlichen Zahlen durchlaufen, so erhält man eine gewisse Folge von Pythagoräischen Zahlentripeln. Freilich sind im allgemeinen nicht alle Tripel von vornherein « primitiv », das heisst in den Tripelzahlen untereinander relativ prim. Die Grundfrage für dieses Problem kann mit den Differenzen zwischen der Hypotenusenzahl und den beiden Kathetenzahlen gelöst werden. Ist die erste dieser Differenzen 1, so werden alle Tripel der Folge « primitiv » sein. Als Beispiel möge das Tripel  $[5; 4; 3]$  und daneben das Tripel  $[5; 3; 4]$  entwickelt werden:

<sup>1)</sup> A. MAROGER, *Les trois étapes du problème Pythagore-Fermat* (Paris 1951). – W. SIERPIŃSKI, *Trojkaty Pitagorejskie* (Warszawa 1954). Beide Arbeiten sind besprochen in *El. Math.* 11, Heft 4, 92 und 96 (1956).

$$\begin{array}{ll}
n = 0: [1; 0; 1] & \left[ \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right] \\
n = 1: [5; 4; 3] & [5; 3; 4] \\
n = 2: [41; 40; 9] & [34; 30; 16] = 2[17; 15; 8] \\
n = 3: [365; 364; 27] & [260; 252; 64] = 4[65; 63; 16] \\
n = 4: [3281; 3280; 81] & [2056; 2040; 256] = 8[257; 255; 32] \\
n = 5: [29525; 29524; 243] & [16400; 16368; 1024] = 16[1025; 1023; 64] \\
\cdots & \cdots \\
n: \left[ \frac{1}{2} (3^{2n} + 1); \frac{1}{2} (3^{2n} - 1); 3^n \right] & \left[ \frac{1}{2} (8^n + 2^n); \frac{1}{2} (8^n - 2^n); 4^n \right] \\
& = 2^{n-1} [2^{2n} + 1; 2^{2n} - 1; 2^{n+1}].
\end{array}$$

Ähnliche Bauart zeigen alle Folgen, die aus primitiven Pythagoräischen Zahlentripeln entstehen. Das allgemeine Prinzip ist am einfachsten aus Formel (12) zu erkennen. So werden viele der bisher bekannten Eigenschaften der Pythagoräischen Zahlen durchsichtiger; neue treten hinzu, und neue Ordnungsprinzipien können aufgestellt werden. Nach (5) und (6), ferner nach dem Schluss von Ziffer 4 in § 2 kann ausserdem jedes Tripel in jedes andere eineindeutig überführt werden. Schliesslich entstehen solche Folgen nicht nur durch die Potenzen eines primitiven Tripels, sondern auch durch beliebige Produktbildungen von zwei oder mehr verschiedenen Tripeln.

Da hier ausdrücklich nur Hinweise gegeben werden können, müssen wir dieses reizvolle Kapitel abbrechen. Doch darf eine Eigenschaft nicht fehlen, da sie direkt zum Thema dieser Arbeit gehört.

Diese Merkwürdigkeit soll der Einfachheit halber nicht allgemein, sondern an dem soeben aufgezeigten Beispiel  $[5; 4; 3]$  erläutert werden. Alle positiven ganzzahligen Potenzen  $n$  ergeben, wie bereits nachgewiesen, in diesem Falle primitive Pythagoräische Zahlen mit der Differenz 1 zwischen Hypotenuse und grosser Kathete. Die allgemeine Potenz lautet

$$\left[ \frac{1}{2} (3^{2n} + 1); \frac{1}{2} (3^{2n} - 1); 3^n \right]. \quad (14)$$

Nach (9) ist das zu diesem inverse Element

$$\frac{1}{3^{2n}} \left[ \frac{1}{2} (3^{2n} + 1); -\frac{1}{2} (3^{2n} - 1); 3^n \right]. \quad (15)$$

Man erhält (15) ebenso, wenn man  $n$  in (14) durch  $(-n)$  ersetzt. Da nun (14) einen allgemeinen Ausdruck für die  $n$ -te Potenz eines Gruppenelementes der allgemeinen Gruppe des § 1 darstellt, bildet (14) mit ganzzahligen (positiven und negativen)  $n$  für sich eine unendliche zyklische Untergruppe der allgemeinen Gruppe des § 1. Für  $n = 0$  haben wir das Einheitselement,  $n$  und  $-n$  liefern zwei inverse Elemente; bei negativen  $n$  sind die Tripelzahlen dem Betrag nach gleich wie beim positiven  $n$ , doch ist die mittlere negativ, und sie haben den Faktor  $3^{-2n}$ .



2. Wir greifen auf die dritte Untergruppe von § 3 zurück, setzen aber anstelle der beiden Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  zwei Funktionen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$ . Setzt man voraus, dass die Gruppenmultiplikation eine Addition der Argumente  $z$  bedeutet, so hat man nach (2) und nach (4) die folgenden Funktionalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} f_1^2(z) &= f_2^2(z) + 1, \\ f_1(z_1 + z_2) &= f_1(z_1) f_1(z_2) + f_2(z_1) f_2(z_2), \\ f_2(z_1 + z_2) &= f_1(z_1) f_2(z_2) + f_2(z_1) f_1(z_2). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Man erkennt sofort, dass eine Lösung sicher  $f_1(z) = \cosh z$ ,  $f_2(z) = \sinh z$  ist. Die Frage nach einer allgemeineren Lösung bleibt offen.

Ebenfalls bleibt die Frage nach Lösungen offen, wenn man in dem System der Funktionalgleichungen voraussetzt, dass die Gruppenmultiplikation nicht die Addition, sondern die Multiplikation der Argumente bedeutet.

In der Tat lassen sich die Hyperbelfunktionen durch die Gruppe aus den Gleichungen (16) heraus vollständig definieren.

3. Genau denselben Weg wie in Ziffer 2 gehen wir mit den beiden Funktionen  $g_1(z)$  und  $i g_2(z)$ . Die Funktionalgleichungen lauten nun

$$\left. \begin{aligned} g_1^2(z) &= -g_2^2(z) + 1, \\ g_1(z_1 + z_2) &= g_1(z_1) g_1(z_2) - g_2(z_1) g_2(z_2), \\ g_2(z_1 + z_2) &= g_1(z_1) g_2(z_2) + g_2(z_1) g_1(z_2). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Lösung  $g_1(z) = \cos z$  und  $g_2(z) = \sin z$  liegt klar auf der Hand. Sämtliche Bemerkungen und Fragestellungen der Ziffer 2 können sinngemäss übernommen werden. Man beachte vor allem den Hinweis, dass die Kreisfunktionen aus der Gruppe  $[g_1(z); i g_2(z); 1]$  heraus vollständig definiert und aufgestellt werden können.

Der Leser wird sicher selbst bemerkt haben, dass aus diesem Zusammenhang heraus die endlichen Untergruppen der Ziffer 4 in § 3 entstanden sind.

4. Abschliessend soll die Frage nach den allgemeinsten Funktionen  $h_1(z)$ ,  $h_2(z)$ ,  $h_3(z)$  aufgeworfen werden, die sich aus der Gruppe mit dem Element  $[h_1(z); h_2(z); h_3(z)]$  durch Aufstellung von Funktionalgleichungen mittels (2) und (4) ergeben.

G. KIRSCHMER, München

## Kleine Mitteilungen

### Stosserregung der Welle einer Turbomaschine durch aerodynamische Kräfte

Der Zustrom oder der Abfluss eines Mediums einer Turbomaschine (Kompressor, Turbine usw.) enthält oft eine Störung der Drehsymmetrie. So wird zum Beispiel die Strömung hinter einem Flugzeugpropeller durch den Tragflügel in 2 Teile zerschnitten