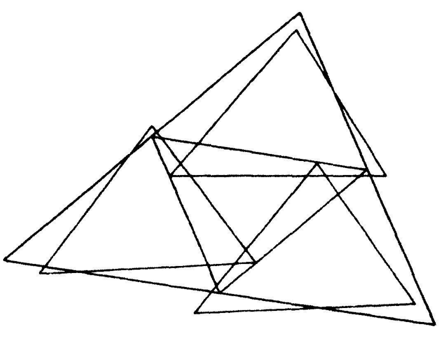
Aufgaben

Die Schwierigkeit der scheinbar einfachen und geometrisch anschaulichen Fragestellung darf indessen nicht unterschätzt werden. Es stellt sich nämlich heraus, dass eine Beantwortung im wesentlichen mit der Lösung des Vierfarbenproblems gleichwertig ist! Es handelt sich um eine geometrische Einkleidung der bekannten Gleichwertigkeit der Vierfärbung einer Landkarte durch eine besondere Zweifärbung der Länderecken[1]).

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 15. Herr L. DANZER (Freiburg i. Br.) hat gezeigt, dass sechs kongruente Dreiecke in der Ebene so liegen können, dass von je vier Dreiecken stets drei einen nichtleeren Durchschnitt haben, wobei es aber nicht möglich ist, die Dreiecksmenge so in zwei Teilmengen zu zerlegen, dass die ein und derselben Teilmenge angehörenden Dreiecke einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen (vgl. Figur). Damit ist bewiesen, dass, falls ein Satz der erörterten Art für beliebige Eibereiche tatsächlich gelten sollte, die Teilmengenanzahl nicht wie vermutet zwei, sondern wenigstens drei betragen müsste.



Aufgaben

Aufgabe 264. H. TIETZE hat 1947 auf die Aufgabe hingewiesen, die m^n Teil-Einheitswürfel eines n-dimensionalen Würfels der Kantenlänge m so zu numerieren, dass die maximale Nummerndifferenz benachbarter Teilwürfel ihren minimalen Wert M annimmt.

a) Man gebe den genauen Wert von M an, falls unter benachbarten Teilwürfeln solche mit einer gemeinsamen Ecke verstanden werden.

b) Man gebe obere und untere Schranken für M an, wenn als benachbart nur Würfel mit einer gemeinsamen $(n-1)$-dimensionalen Seite angesehen werden.

H. LENZ, München

Lösung: Wenn r eine natürliche Zahl ist, soll I_r die Menge der natürlichen Zahlen $\leqq r$ sein. Wir betrachten die aus n Exemplaren I_m gebildete Produktmenge I_m^n. Sie besitzt m^n Elemente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wo alle x_i $(1 \leqq x_i \leqq m,\ 1 \leqq i \leqq n)$ ganz sind. Eine eineindeutige Abbildung f von I_m^n auf I_{m^n} soll eine Numerierung von I_m^n heissen. Wir wollen später die spezielle Numerierung

$$f_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)\, m^{i-1} \tag{1}$$

benutzen. Wir denken uns weiter eine gewisse symmetrische (und reflexive) Relation zwischen zwei Elementen x und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ aus I_m^n gegeben, welche durch «x und y sind Nachbarn» ausgedrückt werde. Wenn f eine Numerierung ist, setzt man $M_f = \mathrm{Max}(|f(x) - f(y)|)$, wo x, y alle Paare von Nachbarn durchläuft, und weiter $M = \mathrm{Min}(M_f)$, wo f alle Numerierungen durchläuft. Wir denken uns weiter, dass die natürliche Zahl s so gewählt ist, dass man für beliebige Paare x, y in höchstens s

[1]) Vgl. hier die ausführliche Darstellung des berühmten Vierfarbenproblems bei H. HASSE, *Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung* (Otto-Salle-Verlag, Frankfurt am Main, Pinneberg 1955), insbesondere die Ausführungen über die äquivalenten Probleme auf Seiten 77 bis 89.

Schritten von Nachbar zu Nachbar von x bis y kommen kann. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| \leqq s\,M_f, \quad \text{speziell } m^n - 1 \leqq s\,M_f, \quad m^n - 1 \leqq s\,M,$$

also

$$M \geqq \frac{m^n - 1}{s}. \tag{2}$$

a) x und y sind Nachbarn, wenn $|x_i - y_i| \leqq 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Dann ist $(x_1 + \delta_1, \ldots, x_n + \delta_n)$ Nachbar zu x, wenn δ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ nur die Werte -1, 0, 1 annimmt. Um von x zu einem gegebenen y zu kommen, wählen wir $\delta_i = -1, 0, 1$, je nachdem $y_i < x_i$, $y_i = x_i$, $y_i > x_i$, und iterieren den Prozess. Hieraus folgt sofort $s = m - 1$, und (2) gibt

$$M \geqq \frac{m^n - 1}{m - 1}. \tag{3}$$

Wenn x und y Nachbarn sind, also $y_i = x_i + \delta_i$, $|\delta_i| \leqq 1$, so gibt (1)

$$f_0(x) - f_0(y) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\, m^{i-1}, \quad \text{also} \quad M_{f_0} = \sum_{i=1}^{n} m^{i-1} = \frac{m^n - 1}{m - 1},$$

und daher wegen (3)

$$M = \frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

b) x und y sollen jetzt Nachbarn heissen, wenn sie Nachbarn nach a) sind und zudem höchstens ein $\delta_i = \pm 1$. Wenn es ein solches gibt, so hat man

$$|f_0(x) - f_0(y)| = m^{i-1}, \quad \text{also} \quad M_{f_0} = m^{n-1}.$$

Da man natürlich hier $s = n\,(m - 1)$ setzen kann, folgt wegen (2) die Abschätzung

$$\frac{m^n - 1}{n\,(m - 1)} \leqq M \leqq m^{n-1}.$$

A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

Der Aufgabensteller bemerkt, dass sich die untere Schranke für M in b) verbessern lässt, da die Nummerndifferenz zwischen zwei Würfeln, die eine $(n - 2)$-dimensionale, aber keine $(n - 1)$-dimensionale Seite gemein haben, höchstens $2\,M - 1$ sein kann.

Aufgabe 265. An einem Punkt greifen drei koplanare Kräfte an, die sich aufheben. Diese drei Kräfte lassen sich in zwei reguläre Kräftetripel zerlegen, derart, dass jede gegebene Kraft aus genau zwei Komponenten besteht, die verschiedenen Tripeln angehören. Wie kann man diese Tripel finden? (Unter einem regulären Kräftetripel sollen drei gleichgrosse koplanare Kräfte verstanden werden, die gegeneinander je einen Winkel von 120° aufweisen.) H. SCHILT, Biel

Lösung: Wir behaupten, es gelte der allgemeinere

Satz: *In der Ebene seien zwei Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$ und $\overrightarrow{OA_2}$ gegeben, ferner zwei Dreiecke $\triangle P_1SP_2$ und $\triangle Q_1TQ_2$, von denen wir nur voraussetzen, dass sie* nicht *gleichsinnig ähnlich seien. Dann lassen sich stets und eindeutig vier Vektoren $\overrightarrow{OX_1}$, $\overrightarrow{OX_2}$, $\overrightarrow{OY_1}$ und $\overrightarrow{OY_2}$ so bestimmen, dass*

$$1.\quad \triangle X_1OX_2 \sim \triangle P_1SP_2, \qquad \triangle Y_1OY_2 \sim \triangle Q_1TQ_2$$

und dass

$$2.\quad \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OY_1}, \qquad \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OY_2}.$$

(Das Zeichen $\sim$ bedeute «gleichsinnig ähnlich».)

Zum *Beweise* verbringen wir alle Vektoren in eine Gaußsche Zahlenebene. Die zugehörigen komplexen Zahlen bezeichnen wir gleich wie die Vektoren selbst, oder da, wo es zweckmässiger ist, mit kleinen lateinischen Buchstaben: $\overrightarrow{OA_1} = a_1$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2$,

$\overrightarrow{OX_1} = x_1$, $\overrightarrow{OY_1} = y_1$. Wir schreiben noch $\overrightarrow{SP_2} = p \cdot \overrightarrow{SP_1}$ und $\overrightarrow{TQ_2} = q \cdot \overrightarrow{TQ_1}$, um durch die Multiplikation mit den komplexen Zahlen p und q die Drehstreckungen (eingeschlossen blosse Drehungen oder Streckungen) darzustellen, durch welche die Winkel und die Seitenverhältnisse der gegebenen Dreiecke vollständig charakterisiert sind. Die Ähnlichkeitsforderung des Satzes kommt dann zum Ausdruck in $\overrightarrow{OX_2} = p \cdot \overrightarrow{OX_1} = p \cdot x_1$ und $\overrightarrow{OY_2} = q \cdot \overrightarrow{OY_1} = q \cdot y_1$ und damit die Summenforderung in den Formeln

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + y_1 = a_1 \\ p x_1 + q y_1 = a_2 \end{array} \right| .$$

Dieses lineare Gleichungssystem für die komplexen Unbekannten x_1 und y_1 hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{a_2 - a_1 q}{p - q}, \qquad y_1 = \frac{a_1 p - a_2}{p - q}.$$

Sie sind endlich und eindeutig bestimmt, da $p \neq q$. ($p = q$ würde gleichsinnige Ähnlichkeit der gegebenen Dreiecke bedeuten.) Durch $p \cdot x_1$ und $q \cdot y_1$ ist auch das zweite gesuchte Vektorenpaar eindeutig bestimmt, womit der Satz bewiesen ist.

Die «regulären Kräftetripel» der *Aufgabe* erhalten wir nun im *Sonderfall* $p = e^{2\pi i/3}$, $q = e^{-2\pi i/3}$; dann haben nämlich die Dreiecke $\triangle P_1SP_2$ und $\triangle Q_1TQ_2$ bei S bzw. bei T Winkel von 120°, sind gleichschenklig und entgegengesetzt orientiert. Da sich die drei Kräfte der Aufgabe aufheben sollen, gilt für den dritten Vektor, mit Rücksicht auf den bewiesenen Satz:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_3} = -\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} &= -(\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OY_1}) - (\overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OY_2}) \\ &= -(\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2}) - (\overrightarrow{OY_1} + \overrightarrow{OY_2}) = \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OY_3}. \end{aligned}$$

Die beiden zuletzt geschriebenen Vektoren sind gerade die dritten Komponenten der regulären Vektortripel. Um die *Konstruktionsvorschrift* anzugeben, berechnen wir zuerst den Nenner

$$p - q = e^{2\pi i/3} - e^{-2\pi i/3} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \sqrt{3}\, e^{\pi i/2},$$

dann

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_2 - a_1 e^{-2\pi i/3})\, e^{-\pi i/2} = \frac{a_1}{\sqrt{3}} e^{-\pi i/6} + \frac{a_2}{\sqrt{3}} e^{-\pi i/2}.$$

Mit zwei Hilfspunkten C und D erhalten wir demnach durch vektorielle Addition $\overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, wenn wir folgendermassen konstruieren: $\sphericalangle A_1OC = -30°$, $\sphericalangle OA_1C = +30°$, $\sphericalangle A_2OD = -90°$, $\sphericalangle OA_2D = +30°$. Da auf analoge Weise

$$y_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}} e^{+\pi i/6} + \frac{a_2}{\sqrt{3}} e^{+\pi i/2}$$

errechnet wird, hat man bei der Konstruktion von $\overrightarrow{OY_1}$ nur in den Winkelvorschriften alle Vorzeichen entgegengesetzt zu nehmen. Bei der Konstruktion der übrigen Komponenten der regulären Vektortripel beachte man schliesslich, dass das gleichseitige Dreieck $\triangle X_1X_2X_3$ positiv, $\triangle Y_1Y_2Y_3$ dagegen negativ orientiert ist.

Bemerkung: Der oben benützte Hilfssatz lässt sich weiter verallgemeinern. In einer Ebene seien erstens n Vektoren $\overrightarrow{OA_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, zweitens n^2 Vektoren $\overrightarrow{OP_{ik}}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ so gegeben, dass noch eine gewisse Bedingung erfüllt sei. Dann lassen sich n^2 Vektoren $\overrightarrow{OX_{ik}}$ so bestimmen, dass erstens je die i-ten Vektor-n-tupel $\overrightarrow{OX_{ik}}$ und $\overrightarrow{OP_{ik}}$ gleichsinnig ähnlich sind, und dass zweitens für jedes k gilt

$$\overrightarrow{OA_k} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OX_{ik}}$$

(also aus jedem n-tupel ein Summand!). Eindeutigkeit besteht dann und nur dann, wenn die Determinante $|p_{ik}|$ nicht verschwindet. Dabei sind die n^2 komplexen Zahlen p_{ik} dadurch gegeben, dass wir in einer Gaußschen Zahlenebene setzen $\overrightarrow{OP_{ik}} = p_{ik} \cdot \overrightarrow{OP_{i1}}$. Die p_{ik} charakterisieren also die Winkel und die Längenverhältnisse in den n gegebenen Vektorbüscheln.

F. STEIGER, Bern

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 266. Man beweise folgende, für ein beliebiges Dreieck gültige Formeln:

1. $$h_a + h_b + h_c = 2R + 4r + \frac{r^2}{R} + 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma;$$

2. $$s^2 - (2R + r)^2 = 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

[R = Umkreisradius, r = Inkreisradius, h = Höhe, $s = (a + b + c)/2$]. Hieraus ergeben sich zwei Charakterisierungen des rechtwinkligen Dreiecks, von denen die zweite, $s = 2R + r$, besonders einfach ist.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

Solution:

(1) $$h_a = \frac{bc}{2R} \text{ etc.}, \qquad 4r = \frac{abc}{Rs}, \qquad r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s},$$

$$1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}(3 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2},$$

therefore

$$h_a + h_b + h_c - 4r - \frac{r^2}{R} = \frac{bc + ac + ab}{2R} - \frac{abc + (s-a)(s-b)(s-c)}{Rs}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} = 2R + 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

(2) $$4Rr + r^2 = \frac{abc + (s-a)(s-b)(s-c)}{s} = ab + bc + ca - s^2,$$

therefore

$$s^2 - 4Rr - r^2 = 2s^2 - (ab + bc + ca) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 4R^2 + 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

It may be pointed out that $2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ is the length of the inradius of the orthic triangle and therefore the formulae given express the sum of the heights and the sides of a triangle by the radii of three of its characteristic circles.

G. N. VLAHAVAS, London

Weitere Lösungen sandten O. BUCHTA (Brno, ČSR), R. LAUFFER (Graz), F. LEUENBERGER (Zuoz), J. SCHOPP (Budapest), M. SEKANINA (Brno, ČSR).

Aufgabe 267. Von zwei kongruenten Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $\lambda \leqq 2 - \sqrt{3}$, die sich decken, soll die eine um ihren Mittelpunkt so weit gedreht werden, dass die beiden Kurven fünf flächengleiche Gebiete begrenzen. (Man gebe entweder eine rein konstruktive Lösung oder berechne den Drehwinkel.) C. BINDSCHEDLER, Küsnacht ZH

Konstruktive Lösung: Wenn nach der Drehung die fünf Flächenteile gleich sind, so ist die gemeinsame Fläche ein Drittel der Ellipsenfläche. Die zu den gegenüberliegenden Schnittpunkten gehörigen Ellipsendurchmesser stehen infolge der Symmetrieeigenschaften der Figur senkrecht zueinander und teilen die gemeinsame Fläche in vier gleiche Teile, von denen also jeder ein Zwölftel der Ellipsenfläche ist. Wenn man die Ellipse E als Projektion eines Kreises betrachtet, ist dieser Ellipsensektor die Projektion eines Kreissektors mit dem Zentriwinkel 30°. α sei der Neigungswinkel der Kreisebene k zur Bildebene π, also $\cos\alpha = \lambda$.

Wir suchen in k diejenigen Richtungen, die miteinander einen Winkel von 30° bilden und deren Projektionen in π einen rechten Winkel bilden. Dazu wählen wir auf dem der grossen Achse von E entsprechenden Kreisdurchmesser eine Strecke XY. Der Fasskreis zum Winkel 30° über XY projiziert sich in π als eine zu E ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse E^*. Die gesuchten Richtungen sind durch die (von X', Y' verschiedenen) Schnittpunkte von E^* mit dem in π über der Projektion $X'Y'$ von XY gezeichneten Thales-Kreis bestimmt[1]). Die so gefundenen senkrechten Ellipsendurchmesser sind die Winkelhalbierenden der Drehungswinkel (2 Lösungen). J. SCHOPP, Budapest

R. LAUFFER (Graz) und der Aufgabensteller gewinnen die gesuchten Richtungen durch Bestimmung der Doppelpunkte einer Projektivität, die aus einer Rechtwinkelinvolution und einer durch Drehung eines Winkels von 30° entstehenden Projektivität zusammengesetzt ist.

Rechnerische Lösung: Jeder der vier kongruenten Flügel der gesuchten Figur sei – in leichter Verallgemeinerung der gestellten Aufgabe – q-mal so gross wie das zentrale Flächenstück. Die beiden Symmetrieachsen der Figur teilen dann jede der beiden Ellipsen in zweierlei Sektoren, von denen sich der kleinere zur halben Ellipsenfläche verhält wie $1:(2+4q)$. Betrachtet man nun den Hauptkreis dieser Ellipse und in ihm die beiden Durchmesser, welche den genannten Symmetrieachsen affin entsprechen, so bilden diese Kreisdurchmesser einen spitzen Winkel φ, und es ist $\varphi = \pi/(2+4q)$ und umgekehrt $q = (\pi - 2\varphi)/4k$. In der Aufgabe ist $q = 1$ und $\varphi = \pi/6$.

Bedeutet ω den halben Drehwinkel, so liefert die angedeutete Affinität für $\operatorname{tg}\omega$ die Bedingung

$$\frac{b}{a}\operatorname{tg}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\omega\right)+\varphi\right\}\operatorname{tg}\omega = -1,$$

oder

$$\operatorname{tg}^2\omega + \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\omega = -1 + \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\omega.$$

Die Auflösung nach $\operatorname{tg}\omega$ liefert kein schönes Resultat. Hingegen ergibt sich

$$\sin 2\omega = \frac{2\operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}^2\omega} = \frac{2ab}{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\varphi}.$$

Der Faktor von $1/\operatorname{tg}\varphi$ lässt sich ebenfalls auf einen Winkel zurückführen. Es ist nämlich

$$\frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \operatorname{tg}\psi,$$

wo ψ den Winkel bedeutet, unter dem die kleine Ellipsenachse aus einem der beiden Hauptscheitel gesehen wird. Somit erhält man für den Drehwinkel die überraschend einfache Darstellung

$$\sin 2\omega = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Bei gegebenen Winkeln ψ und φ lässt sich darnach 2ω sehr einfach konstruieren. Ausserdem bekommt die Lösbarkeitsbedingung die anschauliche Gestalt $\psi \leqq \varphi$.

A. STOLL, Zürich

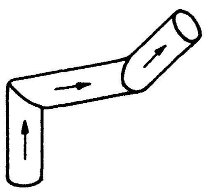
Weitere Lösungen sandten J. ERDÖSI (Budapest), L. KIEFFER (Luxemburg), MARIA KORECZ (Budapest), F. LEUENBERGER (Zuoz), F. STEIGER (Bern).

---

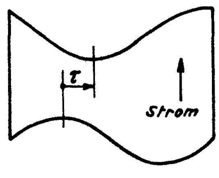
[1]) Die Schnittpunkte einer Ellipse und eines Kreises mit Zentrum auf der kleinen Achse der Ellipse können leicht darstellend-geometrisch konstruiert werden, indem man beide Kurven als Projektionen von zweitprojizierenden Kreisen ein und derselben Kugel auffasst.

Neue Aufgaben

295. Die Stellung dreier aufeinanderfolgender «Schüsse» einer Rohrleitung sei durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ festgelegt, die zu den Zylinderachsen parallel sind. (Figur 1). Diese 3 Vektoren sollen nicht in einer Ebene liegen, so dass die 3 Schüsse einen «Raumkrümmer» bilden.



Figur 1



Figur 2

Die Randlinien des mittleren Schusses sind in der Abwicklung Sinuslinien, die um einen Winkel τ gegeneinander verschoben sind (Figur 2). Wie gross ist dieser Winkel?

W. Kissel, Zürich

296. Man beweise, dass für alle nichtnegativen ganzen x, y, z gilt

$$5^{3^x 5^y z} \equiv 7^x 5^y (5^z - 1) + 1 \pmod{32},$$
$$5^{7^x 5^y z} \equiv 3^x 5^y (5^z - 1) + 1 \pmod{32},$$
$$5^{7^x 3^y z} \equiv 3^x 7^y (5^z - 1) + 1 \pmod{32}.$$

A. Bager, Hjørring (Dänemark)

297. Man beweise: Jede natürliche Zahl $\leqq n!$ lässt sich als Summe von höchstens $n-1$ verschiedenen Teilern von $n!$ darstellen. Lässt sich dieser Satz verschärfen?

P. Erdös, Birmingham

298. Gegeben sind drei Kreise, von denen keine zwei in der gleichen Ebene (oder auf der gleichen Kugel) liegen. Gesucht wird ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise je zweimal schneidet.

C. Bindschedler, Küsnacht

299. Solve the following equation for $f(a)$:

$$\sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{a+b}{p}\right) f(a) = g(b) \qquad (b = 0, 1, \ldots, p-1),$$

where $g(b)$ is given and (a/p) denotes the Legendre symbol.

L. Carlitz, Duke University, Durham, N.C. (USA)

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Eine Ellipse geht durch die Seitenmitten eines Dreiecks. Sie schneidet jede Dreieckseite in einem weiteren Punkt. Die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den Gegenecken schneiden sich in einem Punkt.
[Bildet man die Ellipse affin auf einen Kreis ab, so ist dieser der Feuerbach-Kreis des entsprechenden Dreiecks, der behauptete Schnittpunkt ist dessen Höhenschnittpunkt.]

2. Man betrachtet eine Schar paralleler Sehnen einer Ellipse. Welche dieser Sehnen bestimmt mit dem Ellipsenmittelpunkt ein Dreieck maximaler Fläche?
[Bildet man die Ellipse affin auf einen Kreis ab, so wird das maximale Dreieck rechtwinklig, in der Ellipse liegen folglich zwei Seiten in konjugierten Durchmessern.]
3. Jede Ellipsentangente schneidet den orthoptischen Kreis in Punkten, die auf konjugierten Durchmessern liegen.
[Die Strecke zwischen den Schnittpunkten ist Seite eines der Ellipse umschriebenen Rechtecks; bildet man die Ellipse affin auf einen Kreis ab, so geht das Rechteck in einen Rhombus über, dessen Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen.]
4. Man zieht eine beliebige Parabelsehne und zeichnet die Tangenten t_1, t_2 in ihren Endpunkten und t_3 parallel zu ihr. Die Strecke zwischen t_1 und t_2 auf jeder weiteren Tangente t wird von t_3 halbiert.
[Man betrachte ein affines Bild dieser Figur, in dem die Sehne senkrecht zur Achse steht. Die Bezeichnungen sollen dieselben bleiben. Der Umkreis des Dreiseits $t_1 t_2 t$ geht durch den Brennpunkt F, denn die Scheiteltangente t_3 ist Simsonsche Gerade des Dreiseits bezüglich F. Aus der Gleichheit von Peripheriewinkeln ergibt sich die Behauptung.]
5. Die Steinersche Ellipse eines Dreiecks ist diejenige Umellipse, deren Mittelpunkt im Schwerpunkt des Dreiecks liegt. Legt man die Geraden durch irgendeinen Punkt der Steinerschen Ellipse und durch die Dreiecksecken, so schneiden diese die Gegenseiten in den Eckpunkten eines zweiten Dreiecks. Die Fläche dieses zweiten Dreiecks ist doppelt so gross wie die des ursprünglichen. (Vergleiche Aufgabe 215 dieser Zeitschrift.)
[Bildet man das gegebene Dreieck affin auf ein gleichseitiges ab, so geht die Steinersche Ellipse in den Umkreis des gleichseitigen Dreiecks über, und mit Hilfe ähnlicher Dreiecke ist der Satz leicht zu beweisen.]

Literaturüberschau

John von Neumann:

Mathematical Foundations of Quantum Mechanics

445 Seiten. Übersetzt aus der deutschen Ausgabe von Robert T. Beyer, Princeton University Press 1955

Mit dieser Übersetzung der *Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik* vom Jahre 1932 liegt das Werk in dritter Auflage vor. Dies Standardwerk der quantentheoretischen Literatur braucht nicht ausführlich vorgestellt zu werden. Wenn in der Einleitung vom Autor Stellung genommen wurde gegen die Verwendung der mathematisch nicht einwandfreien Diracschen δ-Funktion und an deren Stelle ein mathematisch strenges Operieren im Hilbert-Raum gefordert und gesetzt wurde, so kann nach 24 Jahren gesagt werden, dass die Entwicklung diese Forderung nicht erfüllt hat. Die δ-Funktion ist geblieben, und insofern ist der Ausgangspunkt des Buches nur mehr historisch interessant. Aber das Buch hatte sich von diesem Ausgangspunkt zu einer umfassenden Analyse von Methode und Tragweite der Quantentheorie überhaupt ausgeweitet. Die Untersuchung gipfelt in dem kühnen Nachweis, dass die in den Unbestimmtheitsrelationen ausgedrückte Durchbrechung des Kausalitätsprinzips nicht einer Lücke unseres physikalischen Erkennens überbunden werden kann, welche durch eine Vervollständigung der Theorie dereinst geschlossen werden könnte, sondern als endgültig hingenommen werden muss, es sei denn, die Aussagen der Theorie erwiesen sich als *falsch*. Die scharfe Herausarbeitung einer Zweiheit quantenphysikalischer Prozesse: in kausaler Bestimmtheit kontinuierlich ablaufender einerseits, statistisch sprunghafter andrerseits, sei hier als weiteres Ergebnis der Analyse hervorgehoben.

Unmöglichkeitsbeweise entsprechen einer besonderen Stufe gedanklicher Kultur. Ist es schon im Fall der Quadratur des Kreises so, dass die Unmöglichkeit nur von einem