Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

diese Schwierigkeit umgehen, wenn man die einfachen Konfigurationen wie F. LEVI in folgender Weise verallgemeinert:

Wenn wir in einer Geraden eine endliche Teilstrecke durch einen einfachen Bogen ersetzen, der mit den beiden restlichen Halbstrahlen der Geraden je nur den betreffenden Endpunkt gemeinsam hat, so nennen wir die entstandene Kurve eine *Pseudogerade*. Eine Pseudogerade ist sozusagen eine «verbogene» Gerade. Wir sagen, m Pseudogeraden bilden eine einfache Konfiguration, wenn sich je zwei in genau einem Punkte schneiden und diese Schnittpunkte alle verschieden sind. Nun ist es stets möglich, eine 1-Verschiebung in bezug auf ein vorgegebenes Dreieck durchzuführen. Der Satz 3 gilt natürlich auch für einfache Konfigurationen mit Pseudogeraden. Ja, es gilt sogar der viel schärfere

Satz 4. *Notwendig und hinreichend dafür, dass eine rechteckige Matrix S mit m Spalten, deren Elemente gleich $+1$ oder -1 sind, zu einer einfachen Konfiguration von Pseudogeraden gehört, ist die gleichzeitige Gültigkeit der drei Bedingungen* I, II, III *von Satz* 3, *wenn $m \neq 4$ vorausgesetzt ist.*

Der Beweis zu Satz 4 ist recht langwierig und kann hier nicht gegeben werden. Er findet sich in der bereits zitierten Arbeit[5]). Dort ist auch das einzige Gegenbeispiel im Falle $m = 4$ angegeben: Eine Matrix mit 4 Spalten und 15 Zeilen, die die drei Eigenschaften I, II, III besitzt und doch nicht durch 4 Geraden (oder Pseudogeraden) realisierbar ist.

G. RINGEL, Bonn

Kleine Mitteilungen

Quelques propriétés de coordonnées relatives à un triangle

Etant donné un triangle ABC quelconque, prenons sur les côtés AB, BC, CA des points C', A', B' tels que $\overline{AC'} = r \cdot \overline{AB}$, $\overline{BA'} = s \cdot \overline{BC}$, $\overline{CB'} = t \cdot \overline{CA}$. Les droites AA', BB', CC' déterminent un nouveau triangle $A''B''C''$ dont on calcule aisément l'aire V:

$$V = V_0 \frac{[(1-r)(1-s)(1-t) - r s t]^2}{(1-s+sr)(1-r+rt)(1-t+ts)} \qquad (V_0 = \text{aire } ABC).$$

Lorsque

$$r s t = (1-r)(1-s)(1-t), \tag{1}$$

les trois points A'', B'', C'' se confondent en un point P. On peut alors considérer les valeurs r, s, t comme des coordonnées triangulaires du point P par rapport au triangle ABC. Tout point P a des coordonnées bien déterminées, sauf les sommets A, B, C qui correspondent aux valeurs $(0, s, 1)$, $(1, 0, t)$, $(r, 1, 0)$ (r, s, t quelconques). Inversement, si on se donne deux des trois valeurs, on détermine univoquement le point P, exception faite des sommets et des côtés du triangle. On peut dire que les coordonnées (r, s, t) engendrent une transformation birationnelle du plan du triangle sur la surface du troisième degré $x \cdot y \cdot z = (1-x) \cdot (1-y) \cdot (1-z)$, les points A, B, C étant singuliers.

Si l'on se donne 3 valeurs a, b, c, vérifiant (1), et un triangle quelconque (non numéroté), on pourra trouver 12 points ayant ces trois nombres pour coordonnées (dans un ordre quelconque), par rapport au triangle ABC ou ACB; si l'on choisit une des orientations du triangle, on aura les 12 points:

$D(a, b, c)$; $E(b, c, a)$; $F(c, a, b)$; $G(1-a, 1-c, 1-b)$;

$H(1-c, 1-b, 1-a)$; $J(1-b, 1-a, 1-c)$;

$D'(a, c, b)$; $E'(b, a, c)$; $F'(c, b, a)$; $G'(1-a, 1-b, 1-c)$;

$H'(1-c, 1-a, 1-b)$; $J'(1-b, 1-c, 1-a)$.

On peut établir par un simple calcul que: DJ, EH, FG, $F'J'$, $D'H'$, $E'G'$ sont parallèles au côté AC; les milieux de tous ces segments se trouvent sur la médiane issue de A. De plus $\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FG}=0$, $\overrightarrow{F'J'}+\overrightarrow{D'H'}+\overrightarrow{E'G'}=0$. Il en est de même pour les autres côtés. Par conséquent, les points $DEFGHJ$ sont sur une conique ayant les médianes pour diamètres; comme les diamètres conjugués de ces médianes sont parallèles aux côtés opposés du triangle, cette conique est semblable à la conique c passant par A, B, C et ayant pour tangentes en ces points les parallèles aux côtés opposés. Il en est de même pour la conique passant par $D'E'F'G'H'J'$ (figure 1).

Si deux des coordonnées r, s, t, sont rationnelles, la troisième l'est aussi. On peut se demander quels sont les points dont les 3 coordonnées triangulaires sont un multiple

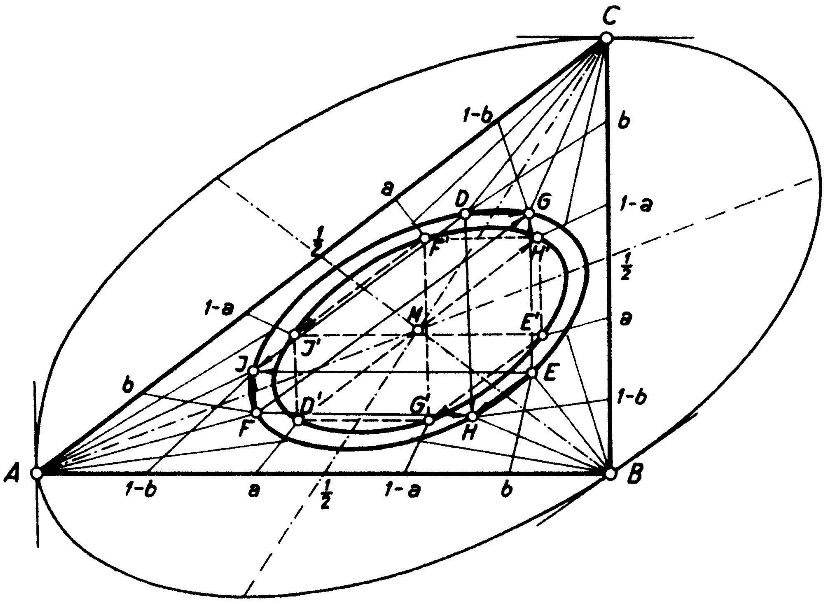

Figure 1

de $1/n$ (n entier), ou, ce qui revient au même si l'on pose $r=r'/n$ (r' entier), etc., quels sont les triplets de nombres entiers qui vérifient la relation

$$r'\cdot s'\cdot t'=(n-r')\,(n-s')\,(n-t')\,.$$

Pour $n=1$, il n'existe aucun point. Pour $n=2$, il y a une infinité de points situés sur les médianes du triangle et pour lesquels $s'+t'=2$, $t'+r'=2$ ou $r'+s'=2$. Il y en a de même une infinité pour tout n pair, c'est pourquoi nous nous limiterons au cas: n impair.

Posons

$$R=\frac{r'}{n-r'}\,,\qquad S=\frac{s'}{n-s'}\,,\qquad T=\frac{t'}{n-t'}\,.$$

Comme $R\cdot S\cdot T=1$, un des facteurs doit être positif; supposons donc

$$0<r'<\frac{n}{2}\,;\qquad 0<R<1\,;\qquad S\,T>1\,.$$

Comme S et T tendent vers -1 lorsque s' et t' tendent vers l'infini, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de solutions. On voit facilement que, si l'on choisit $n<s'<t'$ ou

$n < s'$, $t' < 0$, on doit avoir

$$s' \leqq n \frac{1+\sqrt{R}}{1-R}.$$

Les autres solutions correspondent aux 12 points que l'on associe à toute solution.

Exemples

$$n = 3; \quad r' = 1; \quad R = \frac{1}{2}; \quad s' = 4, \ldots, 10.$$

Solutions: (1, 4, −3); (1, 5, −12); (1, 6, ∞); (1, 7, 24); (1, 8, 15); (1, 9, 12).
Pour $n = 3$, on a donc $n P_3 = \underline{6 \cdot 12}$ points.

$$n = 5; \quad r' = 1; \quad R = \frac{1}{4}; \quad s' = 6, \ldots, 10.$$

Solutions: (1, 6, −10); (1, 7, 40); (1, 8, 15); (1, 10, 10).

$$n = 5; \quad r' = 2; \quad R = \frac{2}{3}; \quad s' = 6, \ldots, 28.$$

Solutions: (2, 9, −10); (2, 10, −15); (2, 12, −35);
(2, 13, −60); (2, 14, −135); (2, 15, ∞);
(2, 16, 165); (2, 17, 90); (2, 18, 65);
(2, 20, 45); (2, 21, 40); (2, 25, 30).

$n P_5 = \underline{16 \cdot 12}$ points, etc.

Remarquons que, pour $n = 3$ et $n = 4$, aucun des points obtenus ne tombe à l'intérieur du triangle ABC. Nous abordons ici le problème que M. Schopp a posé [n° 280, El. Math. *11*, 114 (1956)]: Quelle est la première valeur de n pour laquelle on trouve un point situé dans le triangle. Il faut donc supposer r', s', $t' < n$. Comme n divise

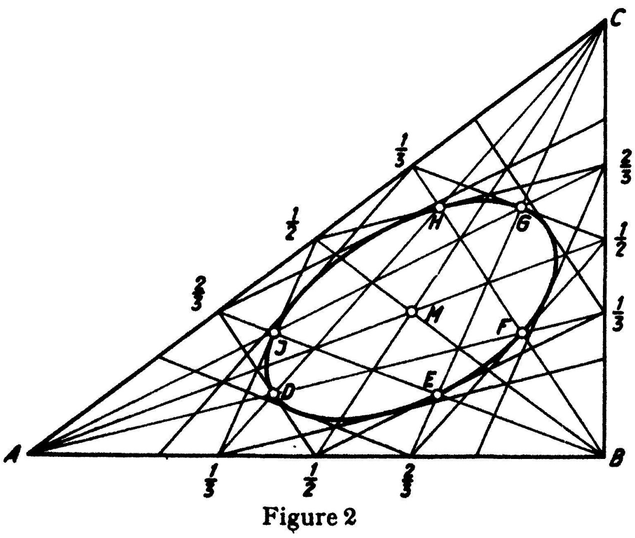

Figure 2

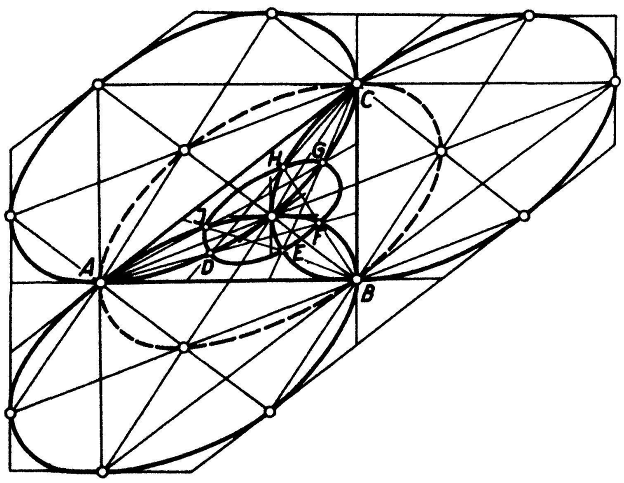

Figure 3

$r' \cdot s' \cdot t'$, il faut que n ne soit pas premier, par conséquent $n = 9, 15, 21, \ldots$. On vérifie que $n = 9$ est impossible, mais que, pour $n = 15$, on a la solution $r' = 10$, $s' = 10$, $t' = 3$. Comme $r' = s'$, les 12 solutions générales sont confondues deux à deux en 6 points D, E, F, G, H, J qui sont sur une conique c, homothétique à la conique $c(ABC)$ circonscrite à ABC et tangente en ces points aux parallèles des côtés opposés. L'aire de $c(ABC)$ est 7 fois plus grande que celle de c. Les tangentes en D et E passent par le milieu du côté AB. La tangente en D coupe le côté AC au tiers de AC. La deuxième tangente issue de ce point est parallèle à la tangente en E (figure 2). On a ainsi trois parallélogrammes circonscrits à la conique c et dont les côtés sont parallèles aux différentes droites joignant les sommets du triangle aux tiers des côtés opposés. Le pôle de DE étant au milieu de AB, la conique coupe les médianes en des points dont les tangentes sont parallèles aux côtés opposés correspondants. La conique $c(AB)$ tangente en A et B aux droites AC et AB et passant par J passe aussi par F; elle passe encore par M, intersection des médianes, et y a une tangente parallèle à AB. Les coniques $c(BC)$ et $c(CA)$ ont des propriétés analogues (figure 3). Ces trois coniques sont congruentes à la conique $c(ABC)$.

J.-P. SYDLER, Zurich

Ungelöste Probleme

Nr. 18. Herr H. LENZ (München) macht uns auf die folgende ungeklärte Frage aufmerksam: Es sei $k \geqq 2$, A ein k-dimensionaler Eikörper von positivem Volumen $V(A) > 0$, $n \geqq k+1$ eine vorgegebene natürliche Zahl und P_n ein in A enthaltenes Eipolyeder mit höchstens n Eckpunkten. Für festes A und n sei

$$p_n = p_n(A) = \sup \frac{V(P_n)}{V(A)} \qquad [P_n \subset A]$$

gesetzt. Die affininvariante Masszahl p_n bezeichnet also das Volumverhältnis, das sich bei einem dem Eikörper A eingelagerten zulässigen Eipolyeder P_n grösstmöglichen Volumens einstellt.

Wie A. M. MACBEATH[1]) mit Hilfe der von W. BLASCHKE[2]) und W. GROSS[3]) erfolgreich auf Sonderfälle angewandten Methode gezeigt hat, gilt

$$p_n(A) \geqq p_n(E),$$

wobei E ein Ellipsoid bezeichnet. Die Ellipsoide haben demnach die extremale Eigenschaft, sich für die volummässige Approximation durch einbeschriebene Polyeder beschränkter Eckenzahl am schlechtesten zu eignen. Unbewiesen ist bis heute die Vermutung geblieben, dass die Ellipsoide die einzigen Eikörper mit dieser Eigenschaft sind, so dass für jedes Nichtellipsoid A

$$p_n(A) > p_n(E) \qquad [A \neq E]$$

gilt. In speziellen Fällen trifft dies in der Tat zu. Dies hat für $n = k+1$ bereits W. GROSS[3]) gezeigt. Für $k = 2$ und $n \geqq 3$ wurde das nämliche von L. FEJES TÓTH[4]) mit Hilfe Fourierscher Reihen nachgewiesen.

---

[1]) A. M. MACBEATH, *An Extremal Property of the Hypersphere*, Proc. Camb. philos. Soc. *47*, 245–247 (1951).

[2]) W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II (Springer, Berlin 1923).

[3]) W. GROSS, *Über affine Geometrie*, XIII: *Eine Minimumseigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids*, Leipziger Ber. *70*, 38–54 (1918).

[4]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).