Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

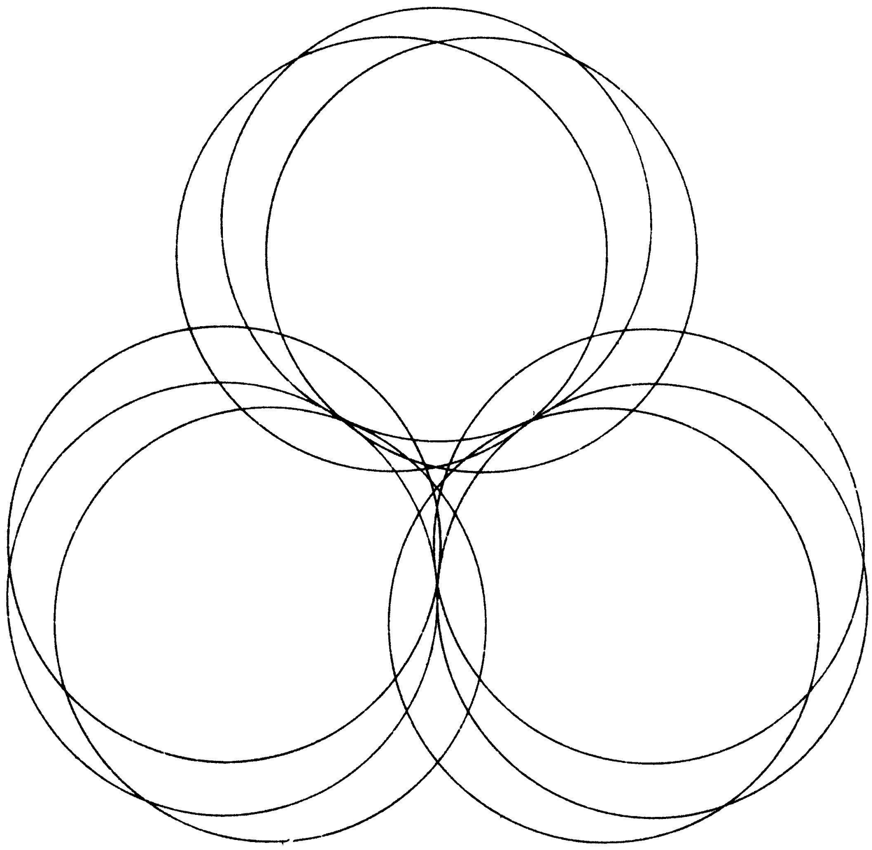
Heft: 5

Rubrik: Ungelöste Probleme

Ungelöste Probleme

Nr. 19. Einführend erklären wir ein sehr einfaches und auch gelöstes Problem. Es gilt die folgende kombinatorisch-geometrische Aussage[1]):

Eine wenigstens drei Elemente enthaltende Menge kongruenter Kreisbereiche der Ebene, von denen je zwei einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen, lässt sich in $n = 3$ Teilmengen so zerlegen, dass die ein- und derselben Teilmenge angehörenden Kreisbereiche alle einen gemeinsamen nichtleeren Durchschnitt haben. Die Stichzahl $n = 3$ kann nicht durch eine kleinere ersetzt werden.



Um einen Beweis zu führen, überlegt man sich zunächst, dass für den Durchmesser D der Menge der Kreismittelpunkte die Beschränkung $D \leqq 2$ gelten muss, wenn man für den Radius der Kreise $r = 1$ setzt. Nach dem bekannten Satz von H. JUNG ist die Mittelpunktsmenge ganz in einem Kreis vom Radius $R = 2/\sqrt{3}$ enthalten. Andererseits kann dieser Hüllkreis durch drei Kreise vom Radius $r = 1$ überdeckt werden, wenn die Mittelpunkte dieser Deckkreise in den Mitten der drei Seiten des dem Hüllkreis einbeschriebenen regulären Dreiecks angenommen werden. Hieraus folgt, dass jeder Kreis der ursprünglichen Kreismenge wenigstens einen der drei Mittelpunkte der Deckkreise enthalten muss. Damit ist gezeigt, dass in unserer Aussage

[1]) Der Satz findet sich bei H. HADWIGER und H. DEBRUNNER, *Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene*, Enseign. math. *1955*, Heft 1, 56–89; insbesondere S. 75, Nr. 37.

die Stichzahl $n = 3$ jedenfalls ausreicht. Dass sie aber auch notwendig ist, zeigt beispielsweise die Menge der neun kongruenten Kreise in der durch die Figur dargestellten Anordnung.

Nach einer von T. GALLAI stammenden Vermutung gilt ein Satz der hier erwähnten Art auch dann, wenn die Kreisbereiche nicht notwendig kongruent sind; die Stichzahl n muss hierbei aber passend erhöht werden.

Wie L. FEJES TÓTH[2]) berichtet, haben P. UNGÁR und G. SZEKERES die Richtigkeit dieser Vermutung nachgewiesen und gezeigt, dass $n = 7$ ausreicht. T. GALLAI hatte aber weiter vermutet, dass $n = 6$ zulässig sei, was in der Tat von A. HEPPES gezeigt werden konnte. Neuerdings hat L. SZTACHÓ gefunden, dass sogar $n = 5$ ausreicht. Diese Angaben hat uns kürzlich L. FEJES TÓTH zur Verfügung gestellt[3]) und die Vermutung ausgesprochen, dass vielleicht sogar $n = 4$ noch zulässig ist.

Unser Problem: Wie gross ist nun die kleinste noch ausreichende Gallaische Stichzahl n?

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 6

Für die von VÁZSONYI stammende Vermutung, wonach für die grösstmögliche Anzahl N von Punktepaaren der Distanz 1, die in einer aus n Punkten bestehenden Punktmenge des gewöhnlichen Raumes vom Durchmesser 1 aufweisbar sein können, $N = 2n - 2$ gilt, liegen heute verschiedene Beweise vor. Zwei ungefähr zur gleichen Zeit unabhängig aufgestellte Beweise gaben B. GRÜNBAUM (The Hebrew University of Jerusalem)[4]) und S. STRASZEWICZ (Polytechnique de Varsovie)[5]).

Es sei darauf hingewiesen, dass aus diesem Ergebnis auch auf die Richtigkeit der Borsukschen Vermutung (vgl. Nr. 2) für endliche Punktmengen geschlossen werden kann. In der Tat hat man sich zunächst zu überlegen, dass aus der Formel von VÁZSONYI gefolgert werden kann, dass in einer endlichen Punktmenge vom Durchmesser 1 sicher ein Punkt vorhanden sein muss, der nicht mehr als drei Nachbarpunkte der Distanz 1 aufweist. Hierauf lässt sich leicht ein induktiverBeweis dafür aufbauen, dass jede endliche Punktmenge in vier Teilmengen von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann. Auf dieser Schlussweise beruht ein besonders einfacher Beweis, den kürzlich A. HEPPES und P. RÉVÉSZ (Budapest)[6]) für den Borsukschen Satz in unserm Sonderfall gegeben haben. Hierbei ist der oben als Folgerung der Formel von VÁZSONYI dargestellte Hilfssatz unabhängig und vor den oben erwähnten Resultaten von GRÜNBAUM und STRASZEWICZ von den beiden Verfassern aufgestellt worden.

H. HADWIGER

---

[2]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953), insbesondere S. 97.

[3]) Brief an den Unterzeichneten vom 25. März 1957.

[4]) B. GRÜNBAUM, *A Proof of Vázsonyi's Conjecture*, Bull. Res. Coun. Israel [A] *6*, 77–78 (1956).

[5]) S. STRASZEWICZ, *Sur un problème géométrique de P. Erdös*, Bull. Acad. polon. Sci., Cl. III, *5*, 39–40 (1957).

[6]) A. HEPPES und P. RÉVÉSZ, *Zum Borsukschen Zerteilungsproblem*, Acta Math. Acad. Sci. hung. *7*, 159–162 (1956).