Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 6

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XII Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1957

Ungelöste Probleme

Nr. 20. Wir stellen die Frage: *Mit wievielen translationsgleichen Exemplaren lässt sich ein Eikörper vollständig überdecken, so dass er ganz im Innern der Vereinigungsmenge der nur durch Verschiebung aus ihm hervorgehenden Körper enthalten ist?*

Die genaue Formulierung des Problems lautet wie folgt: Es sei $k \geqq 1$ eine natürliche Zahl, und N_k bezeichne die kleinste natürliche Zahl, für welche die nachfolgende Aussage richtig ist: Ist A ein eigentlicher konvexer Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes, so gibt es n mit A translationsgleiche Körper A_i $(i = 1, \ldots, n)$ mit $n \leqq N_k$ derart, dass jeder Punkt von A ein innerer Punkt der Vereinigungsmenge $U_1^n A_i$ ist, so dass also A in diesem Sinne durch n translationsgleiche Exemplare vollständig überdeckt wird, wobei n höchstens N_k ist.

Die zur gewünschten Überdeckung ausreichende Anzahl n hängt übrigens sehr stark von der Form des individuell gewählten Körpers ab. Hat A beispielsweise eine reguläre Randfläche, so reicht bereits $n = k + 1$ aus. Wie man mit Anwendung eines Schubfachschlusses leicht einsehen kann, gilt bei einem Parallelotop für die kleinste in Betracht fallende Anzahl bereits $n = 2^k$; damit ist gezeigt, dass jedenfalls $N_k \geqq 2^k$ ausfallen muss. Trivialerweise gilt $N_1 = 2$. Ferner ist leicht nachzuweisen, dass $N_2 = 4$ ist; hierbei wird die höchste erforderliche Exemplaranzahl $n = 4$ lediglich beim Parallelogramm benötigt. Wie F. W. LEVI[1]) nachgewiesen hat, reicht bei jedem vom Parallelogramm verschiedenen ebenen Eibereich schon $n = 3$ aus. Die Levische Schlussmethode ist nicht auf höhere Dimensionen übertragbar. Welchen Wert hat N_k für $k \geqq 3$?

H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung

Es sei O ein beliebiger Punkt im Innern eines Dreiecks $A_1A_2A_3$. Bezeichnen wir mit R_i $(i = 1, 2, 3)$ den Abstand $\overline{OA}_i$, mit r_i den Abstand der Seite $A_{i+1}A_{i+2}$ von O, so gilt die Ungleichung

$$R_1 R_2 R_3 \geqq 8\, r_1 r_2 r_3 . \tag{1}$$

[1]) F. W. LEVI, Arch. Math. *6*, 369–370 (1955). Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns.