

# Das Taktionsproblem von Apollonius, angewandt auf die vier Berührungskreise eines Dreiecks

Autor(en): **Aeppli, Alfred**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19772>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.

Band XIII

Nr. 2

Seiten 25–48

Bâsel, 10. März 1958

---

## Das Taktionsproblem von Apollonius, angewandt auf die vier Berührungskreise eines Dreiecks

### 1. Einleitung

Mit dem klassischen Taktionsproblem von APOLLONIUS, bei dem gefordert wird, alle Kreise zu finden, welche drei gegebene Kreise berühren, haben sich viele bedeutende Mathematiker beschäftigt. VIETA glaubte in seinem *Apollonius Gallus* (1600) die ursprüngliche Lösung von APOLLONIUS wieder entdeckt zu haben. Er zerlegte das Problem in zehn Einzelaufgaben, die er in einer bestimmten Reihenfolge mit Zirkel und Lineal löste, indem er bei jeder neuen Aufgabe die schon erhaltenen Resultate benutzte. DESCARTES stellte die Aufgabe seiner gelehrigen Schülerin, der Prinzessin Elisabeth, als Anwendung seiner Koordinatengeometrie. Sie fand auch durch grossen Fleiss und Ausdauer eine rechnerische Lösung, die aber so kompliziert war, dass sie praktisch wertlos ist. GERGONNE (1817) war der erste, der durch Anwendung der Descartesschen Methode seine berühmte allgemeine Lösung fand. Sein Kunstgriff bestand darin, dass er die Berührungskreise nicht selbst berechnete, sondern durch Kombination der Bedingungsgleichungen Eigenschaften der Berührungspunkte entdeckte. Seine Resultate können am einfachsten überblickt werden, indem man die Begriffe Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsachse, Potenzlinie und Potenzpunkt, Pol und Polare einführt (MONGE, STEINER, PONCELET). Weitere elegante Konstruktionen ergaben sich durch Anwendung der Transformation durch reziproke Radien oder der Inversion (PLÜCKER, 1828). Bei Beschränkung auf unseren Spezialfall ist es nun möglich, mit den Mitteln der analytischen Geometrie einfache Konstruktionen der Berührungskreise zu finden, ihre Radien zu berechnen und interessante Beziehungen zwischen diesen Kreisen zu erhalten. Wie weit diese Resultate neu sind, ist sehr schwierig zu entscheiden, da es in den Fachzeitschriften eine ausgedehnte neuere Literatur über das Problem gibt. Da alle Berechnungen vollständig elementar sind, beschränken wir uns darauf, die Resultate anzugeben.

### 2. Konstruktive Lösung der Aufgabe

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck  $ABC$  mit seinen vier Berührungskreisen  $K(\varrho)$ ,  $K_1(\varrho_1)$ ,  $K_2(\varrho_2)$ ,  $K_3(\varrho_3)$ ; dabei bedeute  $\varrho$  den Inkreisradius und  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$  die Radien der Ankreise, welche  $A$ ,  $B$  bzw.  $C$  gegenüberliegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise be-

zeichnen wir mit  $O, O_1, O_2, O_3$ . Wir stellen uns die Aufgabe, sämtliche Kreise, welche drei von diesen vier Berührungskreisen berühren, zu konstruieren. Es handelt sich also um die viermalige Lösung des Taktionsproblem von APOLLONIUS. Wir wählen zuerst die Kreise  $K, K_2, K_3$ , das heisst, wir suchen alle Kreise, welche den Inkreis und den zweiten und dritten Ankreis eines gegebenen Dreiecks berühren. Bekanntlich kann es höchstens acht solche Kreise geben. Wenn wir die Gerade als Kreis mit unendlich grossem Radius auffassen, so wird hier die maximale Anzahl von Lösungen erreicht. Die Dreieckseiten  $a, b, c$  berühren  $K, K_2, K_3$  und bedeuten daher drei Lösungen. Eine vierte Lösung ist der Kreis von FEUERBACH des gegebenen Dreiecks. Um die noch fehlenden vier Lösungen zu erhalten, benutzen wir das Mittendreieck  $M_1M_2M_3$ , das heisst, die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Dreieckseiten  $a, b, c$  werden als Ecken eines neuen Dreiecks gewählt. Die Mittelpunkte der Ankreise bzw. des Inkreises dieses Dreiecks bezeichnen wir mit  $A', B', C'$  bzw.  $H'$ . Man kann nun leicht beweisen, dass durch  $A'$  drei Kreise gehen, welche  $K, K_2$  und  $K_3$  berühren und deren Tangenten im Punkte  $A'$  parallel zu den Dreieckseiten  $a, b, c$  verlaufen. Damit kennt man von diesen drei Kreisen je einen Punkt mit zugehöriger Tangente und kann daher auf bekannte Weise die Berührungspunkte derselben mit den Kreisen  $K, K_2, K_3$  konstruieren. Für die noch fehlende achte Lösung und den Feuerbach-Kreis bedeutet  $A'$  den äusseren Ähnlichkeitspunkt. Auch jetzt gestattet diese Eigenschaft, in Verbindung mit dem Satze von MONGE über die Lage der Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise, die Berührungspunkte dieses letzten Kreises mit  $K, K_2$  und  $K_3$  zu konstruieren. Auf entsprechende Weise kann man die Berührungskreise von  $(K, K_3, K_1)$ ,  $(K, K_1, K_2)$  und  $(K_1, K_2, K_3)$  konstruieren; anstelle des Hilfspunktes  $A'$  tritt  $B', C'$  bzw.  $H'$ . Neben dem Kreise von FEUERBACH gibt es daher im allgemeinen noch 16 Kreise, welche je drei der vier Berührungskreise eines Dreiecks berühren; diese zerfallen in vier Gruppen von je vier Kreisen, welche je drei bestimmte der vier Berührungskreise berühren. Von diesen 16 Kreisen kann man auf die soeben angegebene Weise die Berührungspunkte mit den Berührungskreisen konstruieren.

### 3. Bezeichnungen

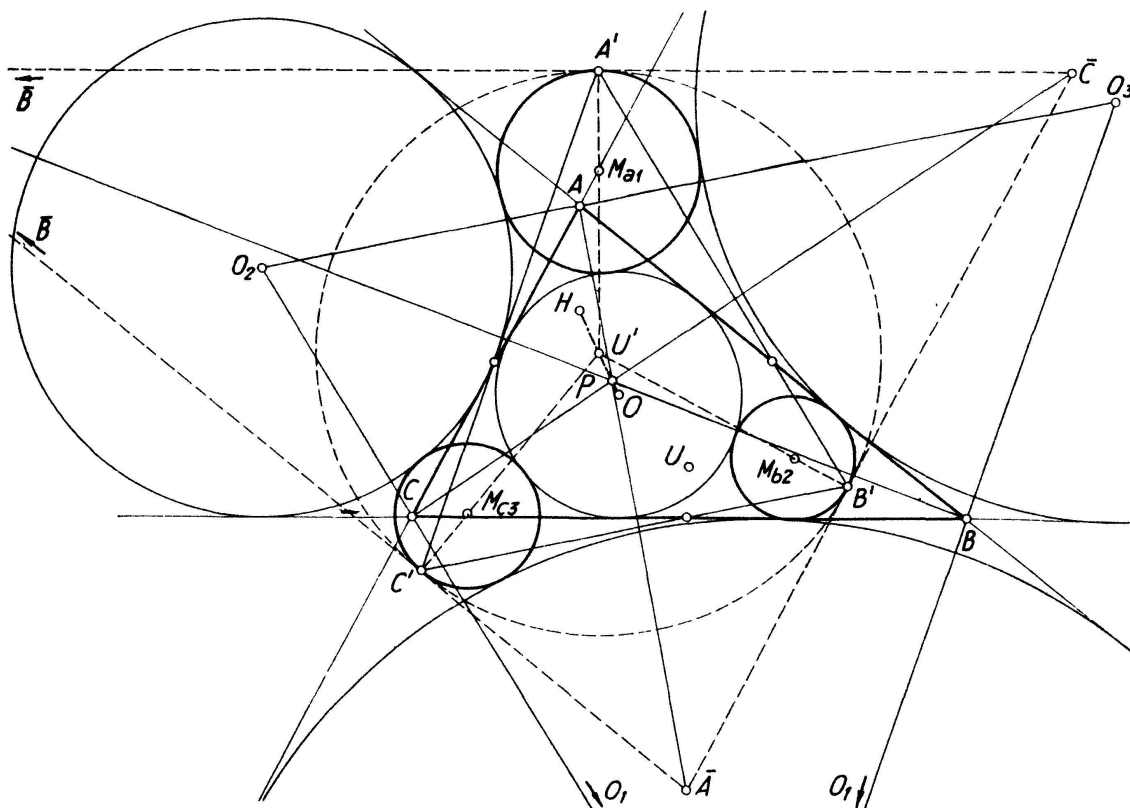
$K_{a1}, K_{a2}, K_{a3}$  sollen diejenigen Berührungskreise bedeuten, die durch  $A'$  gehen und in diesem Punkte eine Tangente besitzen, die parallel zu  $a, b$  bzw.  $c$  ist.  $K_a$  bedeutet denjenigen Berührungskreis, welcher mit dem Feuerbach-Kreis  $A'$  als äusseren Ähnlichkeitspunkt besitzt.  $K_{a1}, K_{a2}, K_{a3}$  und  $K_a$  sind daher die vier Kreise, welche  $K, K_2$  und  $K_3$  berühren. Entsprechend bezeichnen wir mit  $(K_{b1}, K_{b2}, K_{b3}, K_b)$ ,  $(K_{c1}, K_{c2}, K_{c3}, K_c)$  und  $(K_{h1}, K_{h2}, K_{h3}, K_h)$  diejenigen Kreise, welche  $(K, K_3, K_1)$ ,  $(K, K_1, K_2)$  bzw.  $(K_1, K_2, K_3)$  berühren.

### 4. Eigenschaften der Kreise $K_{a1}, K_{b2}, K_{c3}$

(siehe Figur)

Der Umkreis des Dreiecks  $A'B'C'$  berührt diese Kreise in den Punkten  $A', B'$  bzw.  $C'$ . Der Mittelpunkt  $U'$  dieses Umkreises halbiert die Strecke  $OH$ , und sein Radius ist gleich dem Umkreisradius  $r$  des gegebenen Dreiecks  $ABC$ ; dabei bedeutet  $H$  den Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $ABC$ . Die Tangenten in  $A', B'$  und  $C'$  bestimmen

ein Dreieck  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , welches perspektiv ähnlich ist zum Dreieck  $ABC$ . Der Ähnlichkeitspunkt  $P$  dieser beiden Dreiecke teilt die Strecke  $OU'$  im Verhältnis  $\rho : r$  von innen und ist gleichzeitig Potenzzentrum der drei Kreise  $K_{a1}, K_{b2}, K_{c3}$ .



### 5. Die zwölf Berührungskreise

Die zwölf Berührungskreise, welche durch  $A', B', C'$  bzw.  $H'$  gehen, zerfallen in vier Gruppen von je drei Kreisen, wobei die Kreise einer Gruppe denselben Umkreis eines der Dreiecke  $A'B'C', A'B'H', B'C'H'$  bzw.  $C'A'H'$  berühren. Die Mittelpunkte dieser Umkreise halbieren die Strecken  $OH, O_3H, O_1H$  bzw.  $O_2H$ , und ihre Radien sind alle gleich dem Umkreisradius  $r$  des Dreiecks  $ABC$ .

Ist speziell  $1/a = 1/b + 1/c$ , so fallen die Kreise  $K_a, K_{b3}, K_{c2}$  und  $K_{h1}$  zusammen mit dem Umkreis des Dreiecks  $B'C'H'$ . Ein solches Dreieck besitzt also ausser dem Feuerbach-Kreis noch einen zweiten Kreis, welcher alle vier Berührungskreise berührt, sein Mittelpunkt halbirt die Strecke  $O_1H$ , und sein Radius ist gleich  $r$ . Für diesen Kreis und den Feuerbach-Kreis ist  $A'$  äusserer Ähnlichkeitspunkt.

### 6. Eigenschaften der Kreise $K_a, K_b, K_c, K_h$

Die Mittelpunkte  $M_a, M_b, M_c, M_h$  dieser Kreise liegen auf einer Geraden  $g$ , welche durch den Umkreismittelpunkt  $U$  des Dreiecks  $ABC$  geht, und es gilt

$$\overrightarrow{M_h U} : \overrightarrow{M_a U} : \overrightarrow{M_b U} : \overrightarrow{M_c U} = -s : (s - a) : (s - b) : (s - c),$$

wobei

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Für die kürzesten Abstände der Ecken  $A$ ,  $B$  bzw.  $C$  von der Geraden  $g$  gilt

$$d_A : d_B : d_C = \frac{b^2 - c^2}{a^2} : \frac{c^2 - a^2}{b^2} : \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

Die Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks  $A'B'C'$  mit  $g$  sind die äusseren Ähnlichkeitspunkte der Kreise  $K_a, K_b, K_c$ , und die Schnittpunkte der Höhen desselben Dreiecks mit  $g$  sind die innern Ähnlichkeitspunkte des Kreises  $K_h$  mit den Kreisen  $K_a, K_b$  und  $K_c$ .

### 7. Die Radien der 17 Berührungskreise

Die Radien der 17 Berührungskreise können auf folgende Weise aus den Seiten  $a, b, c$  des gegebenen Dreiecks berechnet werden:

Für den Radius des Feuerbach-Kreises gilt  $r_f = a b c / 8 F$ .

Dann findet man:

$$r_a = \left( \frac{a-b}{c} + \frac{a-c}{b} + \frac{b+c}{a} - 1 \right) r_f, \quad r_b = \left( \frac{b-c}{a} + \frac{b-a}{c} + \frac{c+a}{b} - 1 \right) r_f,$$

$$r_c = \left( \frac{c-a}{b} + \frac{c-b}{a} + \frac{a+b}{c} - 1 \right) r_f, \quad r_h = \left( \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 1 \right) r_f.$$

$$\begin{array}{l} r_{a1} = -\left(\frac{a}{b+c}\right) r_a \\ r_{a2} = \left(\frac{b}{c-a}\right) r_a \\ r_{a3} = \left(\frac{c}{b-a}\right) r_a \end{array} \left| \begin{array}{l} r_{b1} = \left(\frac{a}{c-b}\right) r_b \\ r_{b2} = -\left(\frac{b}{a+c}\right) r_b \\ r_{b3} = \left(\frac{c}{a-b}\right) r_b \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} r_{c1} = \left(\frac{a}{b-c}\right) r_c \\ r_{c2} = \left(\frac{b}{a-c}\right) r_c \\ r_{c3} = -\left(\frac{c}{a+b}\right) r_c \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} r_{h1} = \left(\frac{a}{b+c}\right) r_h \\ r_{h2} = \left(\frac{b}{c+a}\right) r_h \\ r_{h3} = \left(\frac{c}{a+b}\right) r_h \end{array} \right|$$

Speziell für ein rechtwinkliges Dreieck ( $\gamma = 90^\circ$ ) reduzieren sich diese Formeln auf:

$$\begin{array}{l} r_a = \frac{c^2 - a b}{4(s-b)} \\ r_{a1} = -\left(\frac{c^2 - a b}{4s}\right) \\ r_{a2} = \frac{c^2 - a b}{4(s-c)} \\ r_{a3} = \frac{c(c^2 - a b)}{4(b-a)(s-b)} \end{array} \left| \begin{array}{l} r_b = \frac{c^2 - a b}{4(s-a)} \\ r_{b1} = \frac{c^2 - a b}{4(s-c)} \\ r_{b2} = -\left(\frac{c^2 - a b}{4s}\right) \\ r_{b3} = \frac{c(c^2 - a b)}{4(a-b)(s-a)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} r_c = \frac{c^2 + a b}{4s} \\ r_{c1} = -\frac{c^2 + a b}{4(s-b)} \\ r_{c2} = -\left(\frac{c^2 + a b}{4(s-a)}\right) \\ r_{c3} = \frac{c(c^2 + a b)}{4(a+b)s} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} r_h = \frac{c^2 + a b}{4(s-c)} \\ r_{h1} = \frac{c^2 + a b}{4(s-a)} \\ r_{h2} = \frac{c^2 + a b}{4(s-b)} \\ r_{h3} = \frac{c(c^2 + a b)}{4(a+b)(s-c)} \end{array} \right|$$

Die Vorzeichen dieser Kreisradien sind folgendermassen festgesetzt: Alle Kreise sollen im Gegenuhrzeigersinne durchlaufen werden; dann begegnen sich bei äusserer Berührung im Berührungspunkte zwei entgegengesetzt gerichtete Drehungen, bei innerer Berührung dagegen sind in dem Berührungspunkte die Umlaufsinn beider

Kreise gleichgerichtet. Daher wollen wir äussere Berührung zweier Kreise als negative, innere Berührung als positive Berührung bezeichnen. Ein Berührungsradius erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Anzahl der negativen, das heisst äusseren Berührungen, gerade oder ungerade ist. Ausnahme:  $r_f$  wird immer positiv gewählt.

Aus den Formeln für die Berührungskreisradien kann man folgende weitere Resultate gewinnen:

1. Für heronische bzw. pythagoreische Dreiecke werden alle Radien rational.
2. Für rechtwinklige Dreiecke gibt es vier Paare gleicher Berührungskreise. Man kann zeigen, dass sie symmetrisch liegen in bezug auf die Winkelhalbierende des rechten Winkels oder seines Nebenwinkels.
3. Es gelten folgende Spaltenbeziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{a3}} + \frac{1}{r_f} &= 0, \\ \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} + \frac{1}{r_{b3}} + \frac{1}{r_f} &= 0, \\ \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_{c1}} + \frac{1}{r_{c2}} + \frac{1}{r_{c3}} + \frac{1}{r_f} &= 0, \\ \frac{1}{r_h} + \frac{1}{r_{h1}} + \frac{1}{r_{h2}} + \frac{1}{r_{h3}} - \frac{1}{r_f} &= 0. \end{aligned} \right\} A$$

4. Weiter gelten folgende Zeilenbeziehungen:

$$\left. \begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r_h + 4 r_f &= 0, \\ r_{a1} + r_{b1} + r_{c1} - r_{h1} + 4 r_f &= 0, \\ r_{a2} + r_{b2} + r_{c2} - r_{h2} + 4 r_f &= 0, \\ r_{a3} + r_{b3} + r_{c3} - r_{h3} + 4 r_f &= 0. \end{aligned} \right\} B$$

5. Einige weitere einfache Formeln sind:

$$\frac{1}{r_a - r_f} + \frac{1}{r_b - r_f} + \frac{1}{r_c - r_f} = \frac{1}{r_h + r_f},$$

$$F_{\Delta} = e \sqrt{e(4r_h - e)} = e_1 \sqrt{e_1(4r_a - e_1)} = e_2 \sqrt{e_2(4r_b - e_2)} = e_3 \sqrt{e_3(4r_c - e_3)},$$

$$e r_h + e_1 r_a + e_2 r_b + e_3 r_c = 4 r^2.$$

## 8. Allgemeiner Satz

Die Gleichungen  $A$  sind Spezialfälle von folgendem allgemeinem Satze, den man auch mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie beweisen kann: *Die Summe der reziproken Werte der Radien der acht Berührungskreise von drei beliebigen Kreisen*

ist gleich Null, dabei müssen die Radien auf die oben angegebene Weise als relative Zahlen aufgefasst werden.

Betrachtet man die verlängerten Seiten des Dreiecks  $ABC$  als drei Kreise von unendlich grossem Radius und beachtet, dass vier Berührungskreise dieser Kreise auch unendlich gross sind, so geht dieser allgemeine Satz über in die bekannte Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho} = 0.$$

ALFRED AEPPLI, Zürich

## Ungelöste Probleme

**Nr. 22.** L. FEJES TÓTH<sup>1)</sup> gab für eine heute noch nicht vollständig bewiesene Aussage die nachfolgend wiedergegebene Einkleidung:

a) Ist  $A$  eine Punktmenge in der Ebene  $E$  und befindet sich in  $E$  eine Kreisscheibe  $K$  in zufallsartig bestimmter Lage und ist  $W$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $K$  genau einen Punkt der Menge  $A$  bedeckt, so gilt

$$W \leq \sqrt{48} - 6 = 0,928 \dots$$

Eine anschaulich-geometrische Formulierung der gleichen Behauptung ist die folgende:

b) Durch lauter kongruente Kreisbereiche lassen sich höchstens 92,8% der Ebene einfach bedecken.

Endlich wollen wir die Aussage noch genauer formulieren:

c) In der Ebene  $E$  sei eine Menge  $M$  kongruenter Kreisbereiche  $K$  von positivem Radius  $R > 0$  vorgegeben. Es bezeichne  $T$  die Menge derjenigen Punkte in  $E$ , die genau einem Kreis  $K$  der Kreismenge  $M$  angehören. Ist  $S_r$  ein Kreisbereich vom Radius  $r$  um einen festen Ursprung  $Z$  der Ebene  $E$  als Zentrum, so gilt

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{F(S_r \cap T)}{\pi r^2} \leq \sqrt{48} - 6,$$

wo  $F$  den Flächeninhalt und  $S_r \cap T$  den Durchschnitt des Kreisbereichs  $S_r$  mit der Punktmenge  $T$  bezeichnet. In der obenstehenden Ungleichung gilt dann das Gleichheitszeichen, wenn  $M$  aus abzählbar-unendlich vielen Kreisen vom Radius  $R$  besteht, deren Mittelpunkte ein rhombisches Punktgitter bilden, wobei der Fundamentalarhombus den spitzen Winkel  $\varphi = \pi/3$  und die Seitenlänge  $s = \sqrt{2 + \sqrt{3}} R = 1,931 \dots R$  aufweist.

Unsere Abbildung zeigt die erwähnte extremale Kreismenge  $M$ , wobei der un-schraffierte Teil der Ebene  $E$  die Menge  $T$  darstellt, während die Schraffur die Menge der durch die Kreisbereiche von  $M$  keinfach oder zweifach überdeckten Punkte andeutet.

<sup>1)</sup> L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953), insbesondere S.97/98.