Ungelöste Probleme

ist gleich Null, dabei müssen die Radien auf die oben angegebene Weise als relative Zahlen aufgefasst werden.

Betrachtet man die verlängerten Seiten des Dreiecks ABC als drei Kreise von unendlich grossem Radius und beachtet, dass vier Berührungskreise dieser Kreise auch unendlich gross sind, so geht dieser allgemeine Satz über in die bekannte Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho} = 0 .$$

ALFRED AEPPLI, Zürich

Ungelöste Probleme

Nr. 22. L. FEJES TÓTH[1]) gab für eine heute noch nicht vollständig bewiesene Aussage die nachfolgend wiedergegebene Einkleidung:

a) Ist A eine Punktmenge in der Ebene E und befindet sich in E eine Kreisscheibe K in zufallsartig bestimmter Lage und ist W die Wahrscheinlichkeit dafür, dass K genau einen Punkt der Menge A bedeckt, so gilt

$$W \leqq \sqrt{48} - 6 = 0{,}928 \ldots .$$

Eine anschaulich-geometrische Formulierung der gleichen Behauptung ist die folgende:

b) Durch lauter kongruente Kreisbereiche lassen sich höchstens 92,8% der Ebene einfach bedecken.

Endlich wollen wir die Aussage noch genauer formulieren:

c) In der Ebene E sei eine Menge M kongruenter Kreisbereiche K von positivem Radius $R > 0$ vorgegeben. Es bezeichne T die Menge derjenigen Punkte in E, die genau einem Kreis K der Kreismenge M angehören. Ist S_r ein Kreisbereich vom Radius r um einen festen Ursprung Z der Ebene E als Zentrum, so gilt

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{F(S_r \cap T)}{\pi r^2} \leqq \sqrt{48} - 6 ,$$

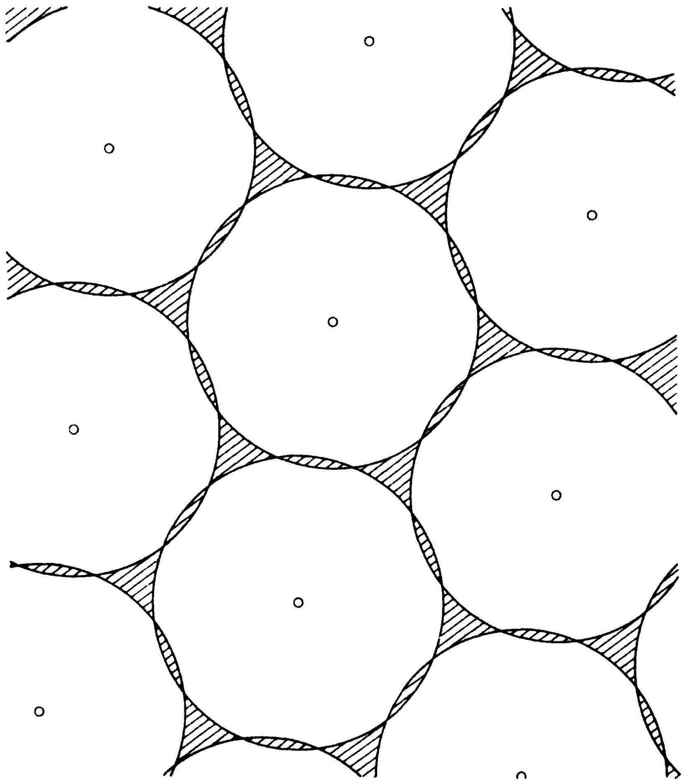
wo F den Flächeninhalt und $S_r \cap T$ den Durchschnitt des Kreisbereichs S_r mit der Punktmenge T bezeichnet. In der obenstehenden Ungleichung gilt dann das Gleichheitszeichen, wenn M aus abzählbar-unendlich vielen Kreisen vom Radius R besteht, deren Mittelpunkte ein rhombisches Punktgitter bilden, wobei der Fundamentalrhombus den spitzen Winkel $\varphi = \pi/3$ und die Seitenlänge $s = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,R = 1{,}931 \ldots R$ aufweist.

Unsere Abbildung zeigt die erwähnte extremale Kreismenge M, wobei der unschraffierte Teil der Ebene E die Menge T darstellt, während die Schraffur die Menge der durch die Kreisbereiche von M keinfach oder zweifach überdeckten Punkte andeutet.

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953), insbesondere S. 97/98.

Die Behauptung wurde von L. FEJES TÓTH unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, dass kein Punkt der Ebene mehr als zwei Kreisen K der Kreismenge M angehört. Soeben hat J. BALÁZS[2]) die Richtigkeit auch dann nachgewiesen, wenn vorausgesetzt wird, dass die Kreise K von M gitterförmig angeordnet sind.

In voller Allgemeinheit ist das Problem noch ungelöst. H. HADWIGER



Nachtrag zu Nr. 7

L. DANZER (Oberwolfach)[3]) bejaht die gestellte Frage und zeigt, dass die Stichzahl $k = 5$ ausreicht. Es gilt also der folgende

Satz: *Werden je fünf Kreisbereiche einer endlichen, wenigstens fünf Elemente enthaltenden Menge sich gegenseitig nicht überdeckender und kongruenter Kreise der Ebene durch eine geeignete Gerade getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Kreise der Menge trifft.*

Von Interesse ist der von L. DANZER direkt bewiesene gleichwertige Satz: Haben die Punkte einer ebenen, endlichen, wenigstens fünf Punkte enthaltenden Punktmenge A paarweise Distanzen, die den Wert $d = 1$ nicht unterschreiten, und gilt für die Dicke D der konvexen Hülle von A die Ungleichung $D > 1$, so enthält A eine fünfpunktige Teilmenge A' derart, dass für die Dicke D' der konvexen Hülle von A' ebenfalls $D' > 1$ gilt. H. HADWIGER

[2]) J. BALÁZS, *Über ein extremales Kreisgitter*, Publ. Math. Debrecen (im Druck).

[3]) Der Beweis wurde am 11. Oktober 1957 an der Geometrietagung des Mathematischen Forschungsinstituts in Oberwolfach vorgetragen. Mittlerweile wurde er veröffentlicht: L. DANZER, *Über ein Problem der kombinatorischen Geometrie*, Arch. Math. *8*, 347–351 (1957).