

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

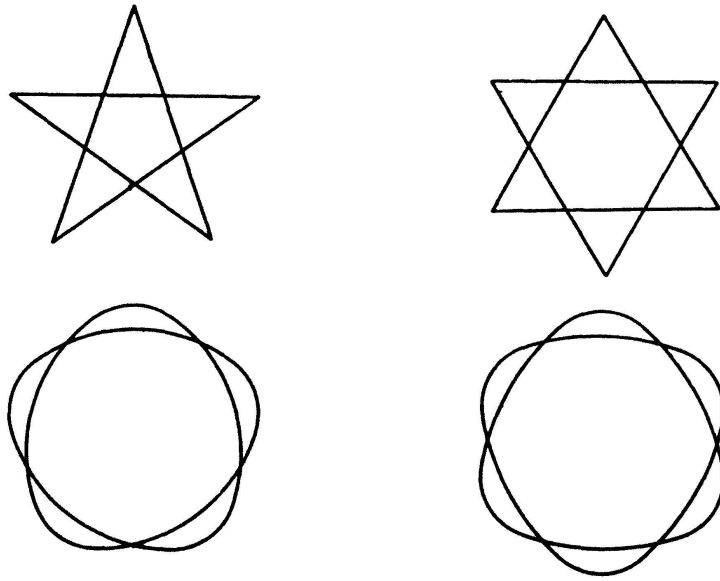
<http://www.e-periodica.ch>

## Kleine Mitteilungen

### Über eine Extremaleigenschaft des fünf- und sechseckigen Sternes

Verbinden wir die Ecken eines regelmässigen  $n$ -Ecks ( $n > 4$ ) so, dass wir in der zyklischen Reihenfolge stets einen Eckpunkt auslassen, so entsteht ein  $n$ -eckiger Stern (von der Dichtigkeit 2). Der fünfeckige Stern wurde von den Pythagoreern als ein Symbol der Gesundheit benützt. Der sechseckige Stern ist ein heiliges Zeichen der Juden.

Wir wollen diese magischen Symbole des Altertums durch eine einfache Extremaleigenschaft charakterisieren. Zu diesem Zweck betrachten wir eine nicht negativ gekrümmte geschlossene Kurve von der totalen Krümmung  $4\pi$  oder 'ein (als eine Kurve



Figur 1

aufgefasstes) Eilinienspaar. Besitzt eine derartige Kurve, die wir ein *Doppeloval* nennen wollen, genau  $n$  Doppelpunkte, so entstehen  $n$  « Monde ». Wir nennen *Mondbogenüberschuss* die Bogenlängendifferenz des äusseren und inneren Bogens eines Mondes. Es gilt der

**Satz 1.** *Besitzt ein Doppeloval von der Bogenlänge  $\Lambda$  genau  $n$  ( $> 4$ ) Doppelpunkte, so gilt*

$$\frac{\Lambda}{\lambda} \geq n \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n},$$

wo  $\lambda$  den kleinsten Mondbogenexzess bedeutet. Gleichheit besteht nur für einen  $n$ -eckigen Stern.

Bemerken wir, dass diese Ungleichung auch noch für  $n = 4$  richtig ist. Gleichheit besteht in diesem Falle für ein in zwei kongruente konzentrische Strecken entartetes Eilinienspaar.

Fassen wir den  $i$ -ten Mond ins Auge! Es bedeute  $L_i$  und  $l_i$  die Bogenlänge des äusseren und inneren Bogens,  $\omega_i$  die totale Krümmung des äusseren Bogens und  $\lambda_i = L_i - l_i$  den Exzess. Wir können  $\omega_i < \pi$  annehmen, da sonst der Mond mit einem umfangs- und exzessgleichen Mond mit  $\omega_i < \pi$  ersetzt werden kann. Dann gilt die Ungleichung

$$l_i \geq L_i \cos \frac{\omega_i}{2}$$

mit Gleichheit nur im Falle, wenn der Mond in ein gleichschenkliges Dreieck übergeht

mit der Basis als innerem Bogen. Hieraus folgt

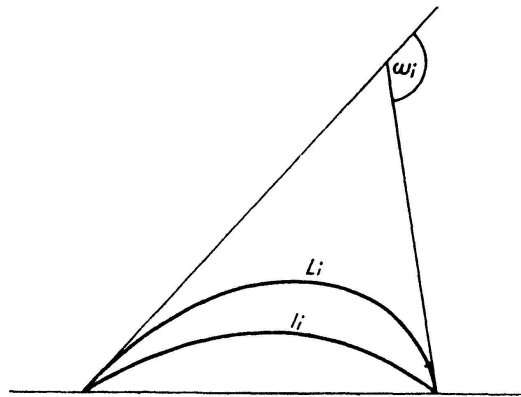
$$\frac{L_i + l_i}{L_i - l_i} \geq \frac{1 + \cos \frac{\omega_i}{2}}{1 - \cos \frac{\omega_i}{2}},$$

das heisst

$$L_i + l_i \geq \lambda_i \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega_i}{4}.$$

Bedenken wir nun, dass  $\operatorname{ctg}^2 x$  für  $0 < x \leq \pi/4$  eine abnehmende, konvexe Funktion ist, so haben wir mit Rücksicht auf  $\sum_{i=1}^n \omega_i \leq 4\pi$  und auf die Jensensche Ungleichung

$$A = \sum_{i=1}^n (L_i + l_i) \geq \lambda \sum_{i=1}^n \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega_i}{4} \geq \lambda n \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}.$$



Figur 2

Gleichheit gilt in den beiden letzten Ungleichungen gleichzeitig nur, falls sämtliche Monde gleichschenklige Dreiecke sind und  $\omega_i = 4\pi/n$ ,  $\lambda_i = \lambda$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ausfällt. Das ist aber eben der in Satz 1 genannte Fall.

Ähnliche Erwägungen ergeben den

**Satz 2.** *Es seien zwei Eibereiche  $e$  und  $E$  vom Umfang  $l$  und  $L$  so vorgegeben, dass  $e < E$  und dass  $e$  und  $E$  genau  $n$  ( $> 2$ ) gemeinsame Randpunkte aufweisen. Bedeutet  $\lambda$  den kleinsten Mondbogenüberschuss, so gelten die Ungleichungen*

$$\frac{l}{\lambda} \geq \frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{L}{\lambda} \geq \frac{n}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n}.$$

*Gleichheit gilt in beiden Ungleichungen nur für zwei reguläre, zueinander polare  $n$ -Ecke.*

Hieraus ergibt sich für die Umfangsumme  $A = L + l$  der Eibereiche

$$\frac{A}{\lambda} \geq n \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n}.$$

Wir erwähnen jetzt den zu Satz 2 analogen

**Satz 3.** *Enthält der Eibereich  $E$  vom Inhalt  $T$  den Eibereich  $e$  vom Inhalt  $t$  und besitzen  $e$  und  $E$  genau  $n$  gemeinschaftliche Randpunkte, so bestehen die Ungleichungen*

$$\frac{t}{\tau} \geq n \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}, \quad \frac{T}{\tau} \geq n \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n},$$

*wo  $\tau$  den kleinsten Mondinhalt bedeutet. Gleichheit findet in beiden Ungleichungen nur für zwei affin reguläre, konzentrische, zueinander polare  $n$ -Ecke statt.*

Die erste Ungleichung wurde für ein Dreieckpaar von H. DEBRUNNER als Aufgabe 260 der Elemente der Mathematik gesetzt. Für Vierecke wurde sie von P. TURÁN und M. BIERNACKI dargetan. Für  $n$ -Ecke hat P. ERDŐS diese Ungleichung als Vermutung ausgesprochen mit der Bemerkung, dass es recht schwierig zu sein scheint, sie zu beweisen.

Es sei hier gezeigt, dass beide Ungleichungen sich leicht aus einer (vom Verfasser vermuteten und zum Teil bewiesenen) Ungleichung von D. LÁZÁR<sup>1)</sup> ergeben. Diese Ungleichung lautet folgendermassen: Ist einem konvexen  $n$ -Eck vom Inhalt  $T$  ein  $n$ -Eck vom Inhalt  $t$  so eingeschrieben, dass  $n$  inhaltsgleiche Randdreiecke entstehen, so gilt

$$\frac{t}{T} \geq \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

Gleichheit gilt nur in dem in Satz 3 angedeuteten Fall.

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, dass man sich im Beweis von Satz 3 auf ein  $n$ -Eck-Paar mit inhaltsgleichen Randdreiecken beschränken kann.

Wir ersetzen zunächst  $e$  durch die konvexe Hülle der  $n$  gemeinsamen Randpunkte von  $e$  und  $E$ . Nach dieser Operation können die Monde eher Randsegmente genannt werden. Sind diese nicht alle inhaltsgleich, so ersetzen wir auch  $E$  durch einen neuen Eibereich, so dass die Randsegmente mit dem Randsegment vom kleinsten Flächeninhalt inhaltsgleich werden. Da bei diesen beiden Operationen weder  $t/\tau$  noch  $T/\tau$  zunimmt, können wir uns auf den Fall beschränken, dass  $e$  ein  $n$ -Eck ist, dessen Seiten von  $E$  inhaltsgleiche Segmente abschneiden. Sind aber die Randsegmente inhaltsgleich, so genügt es, im Hinblick auf  $T = t + n\tau$  den Quotienten  $t/\tau$  abzuschätzen.

Wir halten das  $n$ -Eck  $e$  im folgenden fest. Dann handelt es sich um das Maximum von  $\tau$ . Wir ersetzen  $E$  durch den Durchschnitt seiner  $n$ , zu den Ecken von  $e$  gehörigen Stützhalbebenen. Dadurch gehen die Randsegmente in «Randreiseite» über, von denen eins sich ins Unendliche erstrecken kann. Natürlich nimmt dabei  $\tau$  nicht ab, aber der betrachtete Durchschnitt ist nicht mehr notwendigerweise ein Eibereich. Wir können aber das Maximum von  $\tau$  für die Gesamtheit derjenigen « $n$ -Seite» suchen, die durch  $n$  Stützgeraden von  $e$  begrenzt sind. Da nun  $\tau$  eine stetige Funktion der Stützrichtungen ist, besitzt es ein Maximum, und man sieht sehr leicht ein, dass dieses Maximum nur im Falle von inhaltsgleichen Randreiseiten (also von Randdreiecken) erreicht werden kann. Folglich kann das  $n$ -Seit nur ein gewöhnliches  $n$ -Eck sein.

Damit ist die Zurückführung des Satzes 3 auf den Lázárschen Satz beendet.

L. FEJES TÓTH, Budapest

### Zu einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat in den letzten Jahrzehnten ungemein zugenommen, und sie hat sich auch in der Schule eingebürgert. Eine schöne und einfache Anwendung findet die Wahrscheinlichkeitstheorie in der Genetik. Es bedeuten etwa  $A$  und  $a$  die jeweils in doppelter Zahl vorhandenen Erbanlagen für die Blütenfarben Weiss und Rot. In der Elterngeneration seien die Typen  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$  mit den Häufigkeiten  $u$ ,  $2v$ ,  $w$  vertreten, wobei natürlich

$$u + 2v + w = 1 \quad (1)$$

sein muss. Da  $p = u + v$  und  $q = v + w$  die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Anlagen  $A$  und  $a$  sind, so ist die Häufigkeitsverteilung in der nächsten Generation gegeben durch

$$u_1 = (u + v)^2, \quad 2v_1 = 2(u + v)(v + w), \quad w_1 = (v + w)^2. \quad (2)$$

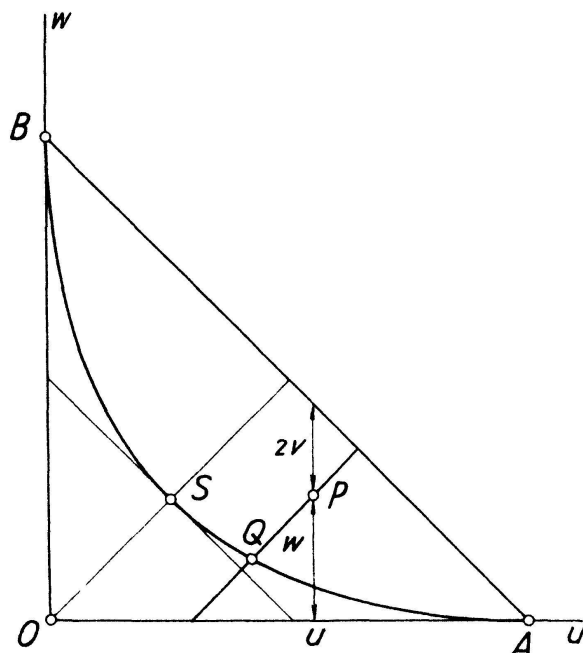
<sup>1)</sup> D. LÁZÁR, *Sur l'approximation des courbes convexes par des polygones*, Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math. 11, 129–132 (1947); vgl. auch L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953), S. 47.

Es zeigt sich nun, dass diese Verteilung bereits *stabil* geworden ist, das heisst, die Häufigkeitsverteilung ändert sich in den folgenden Generationen nicht mehr.

Geht man von einem beliebigen Zahlentripel  $u, 2v, w$  aus, das (1) genügt, so gelangt man durch die Operation (2) zu einem Tripel  $u_1, 2v_1, w_1$ , das bei beliebiger Wiederholung der Operation (2) invariant bleibt. Wie sind diese Zahltripel unter den zulässigen  $u, 2v, w$  ausgezeichnet, wie findet man ihre Gesamtheit, und welche Tripel führen zu demselben invarianten Tripel?

Durch Elimination von  $v$  erhält man sofort eine Parameterdarstellung der invarianten Tripel

$$u_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{u-w}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+z)^2, \quad 2v_1 = \frac{1-z^2}{2}, \quad w_1 = \frac{1}{4}(1-z)^2, \quad (3)$$



wobei  $-1 \leq z = (u-w)/2 \leq 1$  ist.

Die Invarianz ergibt sich einfach, denn es ist

$$u_2 = (u_1 + v_1)^2 = \frac{1}{4}(1+z)^2, \quad 2v_2 = 2v_1, \quad w_2 = (v_1 + w_1)^2 = \frac{1}{4}(1-z)^2.$$

In einer  $(u, w)$ -Ebene erfüllen die den zulässigen Tripeln  $u, 2v, w$  zugeordneten Punkte  $P(u, w)$  das Dreieck  $OAB$  (siehe Figur). Alle Punkte, die mit  $P(u, w)$  auf derselben Parallelen zur Winkelhalbierenden liegen, haben dieselbe Koordinatendifferenz  $u - v = z$  und führen deshalb zu demselben Punkte  $Q(u_1, w_1)$  mit invarianten Koordinaten. Diese Punkte  $Q(u_1, w_1)$  erfüllen den Bogen einer Parabel zwischen den Berührungspunkten  $A$  und  $B$  mit den Koordinatenachsen. Den Punkten  $A(1, 0)$  und  $B(0, 1)$  entsprechen die reinrassigen Sorten  $AA$  und  $aa$ , dem Punkte  $O(0, 0)$  aber die Bastardsorte  $Aa$ . Züchtet man mit einer reinen Sorte weiter, so bleibt dieselbe reinrassig. Die Punkte  $A$  und  $B$  sind deshalb Parabelpunkte. Züchtet man mit der Bastardsorte weiter, so zeigt die nächste Generation die dem Parabelscheitel  $S(1/4, 1/4)$  entsprechende Häufigkeitsverteilung  $1/4, 1/2, 1/4$ .

P. BUCHNER

### Zur Behandlung des Satzes von Bernoulli im Unterricht

1. Falls die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule behandelt wird, so dürfte die Besprechung des Bernoullischen Theorems den zweckmässigen, zusammenfassenden Abschluss bilden und zugleich wertvolle Ausblicke auf Verallgemeinerun-

gen gestatten [1, 2]<sup>1)</sup>. – Der Weg über die Laplacesche Formel wird dabei im allgemeinen zu schwierig sein, wenn auch für gewisse Schritte, zum Beispiel für die Herleitung der Stirlingschen Formel, recht anschauliche Beweise existieren [3]. – Dagegen werden im völlig exakten Beweis, den JAKOB BERNOULLI selbst in seiner *Ars conjectandi* [4, 5] gibt, nur elementare Hilfsmittel verwendet. Doch setzt dieser Beweis mehrere Hilfssätze über Potenzen eines Binoms voraus, zu deren Behandlung die Zeit fehlen wird. – Fasst man nun aber das Bernoullische Theorem als Sonderfall der Streuungsungleichung von P. L. TSCHEBYSCHEFF auf, so benötigt man nur den Additions- und den Multiplikationsatz mit der daraus folgenden Newtonschen Formel; vor einiger Zeit hat P. BUCHNER einen Beweis in dieser Zeitschrift dargestellt [6, 7]. Will man die bei der Berechnung von Erwartungswert und Streuung auftretenden Umformungen von Summen und Binomialkoeffizienten auch noch weitgehend vermeiden, so kann man die folgende Beweisordnung wählen. Die Streuung wird dabei durch Weiterführung eines von L. BACHELIER [8, 9] skizzierten Gedankens berechnet.

2. Aus einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln werde eine Kugel gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze zu ziehen, sei  $p$ , die Gegenwahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$ . Das Experiment werde bei gleichbleibendem  $p$   $n$ -mal wiederholt; die Wahrscheinlichkeit für  $k$ -maliges Auftreten einer schwarzen Kugel ist nach NEWTON

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (1)$$

mit

$$\sum_{k=0}^n p_k = (p + q)^n = 1. \quad (2)$$

Jetzt kann man fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Differenz

$$\left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon$$

oder  $|k - np| < \varepsilon n$  sei, wo  $\varepsilon$  eine beliebige positive Zahl ist. (Die Frage ist auch sinnvoll, wenn der Erwartungswert  $E(k)$  nicht definiert und berechnet wurde.) Diese Wahrscheinlichkeit werde mit

$$W = W \left( \left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \quad (3)$$

bezeichnet.

3. Nun definiert man in bekannter Weise die Varianz oder quadratische Streuung  $\sigma_n^2$  der durch (1) gegebenen binomischen Verteilung:

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^n (k - np)^2 p_k$$

mit  $x_k = k - np$  wird

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^n x_k^2 p_k. \quad (4)$$

Zur Berechnung von  $\sigma_n^2$  führen wir die folgende Betrachtung durch, die zugleich Entstehung und Aufbau dieses Wertes deutlich macht:

In  $n$  Versuchen sei  $k$ -mal eine schwarze Kugel erschienen; wir betrachten die Abweichung  $x_k = k - np$ . Führen wir nun einen weiteren Versuch durch, so kann mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  eine schwarze Kugel erscheinen, was die neue Abweichung

$$(k + 1) - (n + 1)p = x_k + q \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 37.

ergibt; andererseits kann mit der Wahrscheinlichkeit  $q$  eine weisse Kugel erscheinen, was die neue Abweichung

$$k - (n + 1) p = x_k - p \quad (6)$$

ergibt. Nach (1) ist ferner  $p_k$  die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten  $x_k$ , somit ist  $p_k p$  die Wahrscheinlichkeit von (5) und  $p_k q$  jene von (6), so dass sich nun die Varianz  $\sigma_{n+1}^2$  aus Summanden der folgenden Art zusammensetzt:

$$(x_k + q)^2 p_k p + (x_k - p)^2 p_k q = x_k^2 p_k + p_k p q. \quad (7)$$

Summieren wir in (7) von  $k = 0$  bis  $k = n$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2) und (4)

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 + p q,$$

das heisst, mit jedem Versuch vermehrt sich die Varianz um  $p q$ . Da sie für  $n = 0$  den Wert 0 hat, so folgt

$$\sigma_n^2 = n p q. \quad (8)$$

4. Um nun zu einer Abschätzung der Wahrscheinlichkeit  $W$  zu kommen, summieren wir in (4) nur über jene  $k$ , für die  $|x_k| \geq \varepsilon n$ . Wir bezeichnen diese Summe mit  $\Sigma'$ . Es folgt

$$n p q \geq \Sigma' x_k^2 p_k \geq \varepsilon^2 n^2 \Sigma' p_k.$$

Nun ist aber mit (3)

$$\Sigma' p_k = 1 - W,$$

also

$$W \geq 1 - \frac{p q}{\varepsilon^2 n}.$$

Mit vorgegebenen, festen  $p, q$  und  $\varepsilon$  geht also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Trefferzahl  $k$  der Bedingung  $|k/n - p| < \varepsilon$  oder  $|k - n p| < \varepsilon n$  genügt, mit wachsendem  $n$  gegen 1. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Es sei noch angemerkt, dass man auch ohne die eben durchgeführte Abschätzung mit L. BACHELIER ([8], S. 18) bereits in (8) den Kern des Bernoullischen Satzes erkennen kann, da sich aus (8) ohne neue Rechnung die Varianz für die relative Häufigkeit  $k/n$  zu  $p q/n$  ergibt.

R. INEICHEN, Luzern

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. BUCHNER, *Beispiel zum Grenzwertsatz*, *El. Math.* 7, 53 (1952).
- [2] W. SAXER, *Über die Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *El. Math.* 5, 50 (1950).
- [3] E. TROST, *Eine anschauliche Herleitung der Stirlingschen Formel*, *Festschrift Andreas Speiser* (Zürich 1945), S. 138.
- [4] Ostwalds Klassiker Nr. 108 (Leipzig 1899), S. 94.
- [5] J. EGGENBERGER, *Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals*, *Mitt. naturf. Ges. Bern* 1893.
- [6] P. BUCHNER, *Bemerkungen zum Satz von Bernoulli*, *El. Math.* 7, 8 (1952).
- [7] B. W. GNEDENKO und A. J. CHINTSCHIN, *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Leipzig 1955), S. 60.
- [8] L. BACHELIER, *Calcul des Probabilités*, Bd. 1 (Paris 1912), S. 17.
- [9] E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Bd. 1 (Leipzig 1914), S. 140.

**Ein Satz über die stetige Differenzierbarkeit der Lösungen  
von  $F(x, y, y') = 0$**

Sei  $F(x, y, p)$  eine in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  des  $(x, y, p)$ -Raums stetige Funktion mit folgender zusätzlicher Eigenschaft:

Es gibt eine für alle Quadrupel  $(x, y, p, h)$  mit  $(x, y, p) \in \mathfrak{G}$ ,  $(x, y, p + h) \in \mathfrak{G}$  definierte Funktion  $M(x, y, p, h)$ , welche für kein  $(x, y, p)$  aus  $\mathfrak{G}$  identisch in einer Umgebung von  $h = 0$  verschwindet, derart, dass

$$F(x, y, p + h) = F(x, y, p) + M(x, y, p, h) h \quad (1)$$

gilt.

Unter diesen Voraussetzungen ist jede (in  $\mathfrak{G}$  verlaufende) Lösung  $\varphi(x)$  der Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

im Inneren ihres Definitionsbereiches stetig differenzierbar.

Sei nämlich  $\xi$  eine im Inneren des Definitionsbereiches liegende Unstetigkeitsstelle von  $\varphi'(x)$ ; es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\limsup_{x \rightarrow \xi} \varphi'(x) > \varphi'(\xi)$ . Nun kann man auf Grund des Zwischenwertsatzes für die Ableitung einer Funktion<sup>1)</sup> offenbar zu jedem  $\mu$  mit

$$\limsup_{x \rightarrow \xi} \varphi'(x) > \mu > \varphi'(\xi) \quad (3)$$

eine gegen  $\xi$  konvergierende Folge  $(x_\nu^{(\mu)})$  angeben, derart, dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi'(x_\nu^{(\mu)}) = \mu \quad (4)$$

st. Da nun, wie leicht ersichtlich,  $M(x, y, p, h)$  an allen Stellen mit  $h \neq 0$  stetig ist, so folgt, wegen (4), (3), (1) und der Stetigkeit von  $F(x, y, p)$ , die Beziehung ( $\varphi(x)$  ist bei  $\xi$  gewiss stetig!):

$$F(\xi, \varphi(\xi), \mu) = F(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) + M(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi), \mu - \varphi'(\xi)) \{ \mu - \varphi'(\xi) \}, \quad (5)$$

und zwar für alle  $\mu$  mit (3).

Da wegen des vorausgesetzten Lösungscharakters von  $\varphi(x)$

$$F(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0, \quad (6)$$

$$F(x_\nu^{(\mu)}, \varphi(x_\nu^{(\mu)}), \varphi'(x_\nu^{(\mu)})) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

und mithin, wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  und  $F$  und wegen (4),

$$F(\xi, \varphi(\xi), \mu) = 0 \quad (8)$$

gilt, so muss – gemäss (3) und den soeben gewonnenen Aussagen (6), (8) –

$$M(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi), \mu - \varphi'(\xi)) = 0 \quad (9)$$

sein, und zwar wieder für alle  $\mu$  mit (3). Das stellt aber einen Widerspruch zur Beschaffenheit von  $M(x, y, p, h)$  dar, womit die behauptete Stetigkeit bewiesen ist.

*Bemerkung:* Dass es andererseits Differentialgleichungen der Form  $F(x, y, y') = 0$  gibt, bei denen  $F(x, y, p)$  sogar analytisch in  $x, y, p$  ist, welche Lösungen besitzen, die nicht stetig differenzierbar sind, zeigt folgendes triviale Beispiel:

Man wähle

$$F(x, y, p) \equiv x^4 + (4x^2 - 5)p^2 + (2y - x^2 p)^2.$$

<sup>1)</sup> Siehe zum Beispiel E. LANDAU, *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung* (Groningen-Batavia 1934), S. 112, Satz 164.



Offenbar besitzt dann  $F(x, y, y') = 0$  die Lösung

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

HELMUT PACHALE, Berlin

### Zur Herleitung der Potenzreihendarstellungen für die Winkel-, Hyperbel- und Exponentialfunktionen

Die Potenzreihen für die genannten Funktionen werden im allgemeinen mit Hilfe des Taylorschen Lehrsatzes bewiesen. Ich möchte ein einfaches Verfahren angeben, das es gestattet, die entsprechenden Reihen ohne Verwendung von Differential- oder Integralrechnung herzuleiten.

Als Beispiel nehme ich die Funktion  $\sin x$ . Bekanntlich gilt die durch vollständige Induktion oder mit Hilfe des Moivreschen Lehrsatzes leicht beweisbare Beziehung

$$\sin n \alpha = \binom{n}{1} \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \binom{n}{5} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - + \dots$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Setzt man  $n \alpha = x$ , so ergibt sich

$$\sin x = \binom{n}{1} \sin \frac{x}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{n} - \binom{n}{3} \sin^3 \frac{x}{n} \cos^{n-3} \frac{x}{n} + - \dots.$$

Aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

folgt sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \sin^k \frac{x}{n} = \frac{x^k}{k!} \quad (k = 1, 3, 5, \dots)$$

und somit für  $n \rightarrow \infty$  bei festem  $k$  und  $x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + - \dots \pm \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \lim_{n \rightarrow \infty} R(n, k)$$

mit

$$R(n, k) = \pm \binom{n}{k} \sin^k \frac{x}{n} \cos^{n-k} \frac{x}{n} \mp \binom{n}{k+2} \sin^{k+2} \frac{x}{n} \cos^{n-k-2} \frac{x}{n} \pm \dots.$$

Wegen

$$\left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n}$$

gilt für  $k > |x|^2 - 2$ :

$$|R(n, k)| < \frac{1}{k!} |x|^k + \frac{1}{(k+2)!} |x|^{k+2} + \dots < \frac{1}{k!} |x|^k \frac{1}{1 - \frac{|x|^2}{k+2}};$$

also geht  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, k)$  für  $k \rightarrow \infty$  und festes  $x$  gegen 0.

Die Potenzreihenentwicklung für  $\sin x$  ist damit gewonnen. Da analoge Beziehungen wie für  $\sin n \alpha$  auch für  $\cos n \alpha$ ,  $\sinh n \alpha$  und  $\cosh n \alpha$  gelten, kann man die Reihenentwicklungen dieser Funktionen ganz entsprechend herleiten. Die Potenzreihe für  $e^x$  findet man entweder auf Grund von  $e^x = \sinh x + \cosh x$  oder durch direkte Anwendung

des obigen Verfahrens auf

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sinh^k x \cosh^{n-k} x.$$

H. GRÖMER, Wien

*Anmerkung der Redaktion:* Ähnliche Herleitungen findet man in dem Buche von TH. VAHLEN, *Konstruktionen und Approximationen* (Verlag Teubner, 1911), S. 256f.

## Aufgaben

**Aufgabe 283.** Wir betrachten einen ebenen Bereich  $B$ , begrenzt durch die geschlossene Kurve  $C$ . Eine Linie ohne Doppelpunkte, welche zwei Punkte von  $C$  verbindet und innerhalb  $B$  verläuft, heisst ein *Bisektor* von  $B$ , wenn sie  $B$  in zwei inhaltsgleiche Teile teilt. Ein Bisektor heisst *kürzester Bisektor* von  $B$ , wenn es keinen Bisektor von geringerer Länge in  $B$  gibt (vgl. des Aufgabenstellers *Mathematics and Plausible Reasoning*, Bd. 1, S. 185–186, Aufgaben 27–33). Man beweise:

Bei gegebenem Flächeninhalt wird der kürzeste Bisektor Maximum (also ein «maximum minimorum» oder «Maximin»):

1. für das gleichseitige Dreieck unter allen Dreiecken,
2. für das Quadrat unter allen Parallelogrammen,
3. *nicht* für das Quadrat unter allen Vierecken,
4. für den Kreis unter allen zentralsymmetrischen Bereichen. (Ob der Satz unter 4. richtig bleibt, wenn das Wort «zentralsymmetrisch» gestrichen wird, ist eine offene Frage.)

G. PÓLYA, Palo Alto, California, USA

*Lösung* (nach Angaben des Aufgabenstellers): Es bedeute  $F$  den Flächeninhalt von  $B$  und  $k$  die Länge des kürzesten Bisektors.

1. Ist ein Winkel  $XOY < 180^\circ$  gegeben und soll ein Punkt  $X$  des einen Schenkels mit einem Punkt  $Y$  des anderen Schenkels durch eine Linie so verbunden werden, dass die Fläche des Bereiches  $XOY$  einen vorgeschriebenen Wert  $W$  hat und gleichzeitig die Verbindungslinie  $XY$  möglichst kurz ist, so muss  $XY$  ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt  $O$  sein (vgl. *Mathematics and Plausible Reasoning*, Band 1 (MPR), S. 269, Nr. 16–19). Der Beweis beruht darauf, dass der Umfang eines Kreises kürzer ist als derjenige irgendeiner andern geschlossenen Kurve mit demselben Flächeninhalt. Somit kann die kürzeste Verbindungslinie  $XY$  nur ein Kreisbogen sein. Dass das Zentrum in  $O$  liegen muss, erkennt man durch Spiegelung von  $OX$  bzw.  $OY$  an  $OY$  bzw.  $OX$ . Die die Fläche  $2W$  abgrenzende, aus zwei Kreisbogen bestehende Linie muss im Fall der minimalen Verbindung  $XY$  selbst ein Kreisbogen sein, so dass der Kreisbogen  $XY$  die Schenkel des Winkels in  $X$  und  $Y$  rechtwinklig schneidet.

Hieraus folgt für ein Dreieck mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  (Bogenmass!)

$$k^2 = F \operatorname{Min}(\alpha, \beta, \gamma) \leq \frac{\pi}{3} F,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für das gleichseitige Dreieck gilt.

2. Hat  $B$  ein Symmetriezentrum  $Z$ , so ist der kürzeste Bisektor eine Strecke (vgl. MPR, S. 272, Nr. 33). Aus einem bogenförmigen Bisektor  $XY$  ergibt sich nämlich durch Spiegelung an  $Z$  der Bisektor  $X'Y'$ .  $XY$  und  $X'Y'$  schneiden sich in den symmetrischen Punkten  $P, P'$ . (Zwei Bisektoren eines Bereichs müssen notwendig einen gemeinsamen Punkt haben!) Ist  $XPP'Y$  die Reihenfolge der Punkte auf  $XY$  und  $PY' \leq PX$ , so gilt  $Y'Y < Y'PY \leq XY$ . Der «Durchmesser»  $YY'$  ist also ein kürzerer Bisektor als  $XY$ .

Im Parallelogramm mit den Seiten  $a, b$  und den entsprechenden Höhen  $h_a, h_b$  sei  $h_b \leq h_a, a \leq b$ , so dass  $k = h_b$ . Wegen  $h_b \leq b$  ergibt sich

$$k^2 \leq b h_b = F.$$