Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 6

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

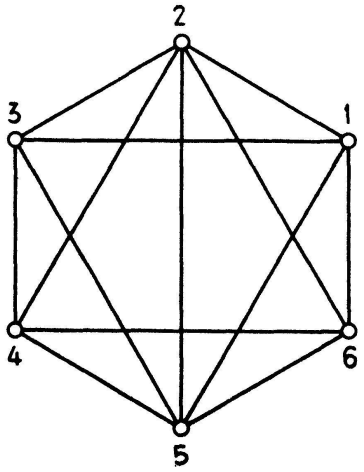
Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

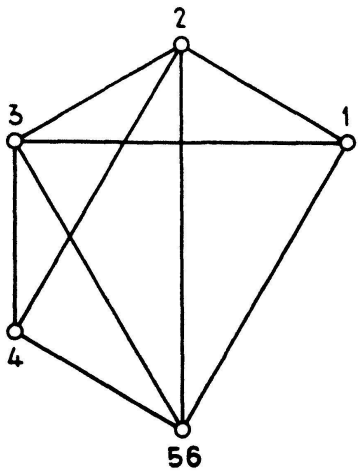
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ungelöste Probleme

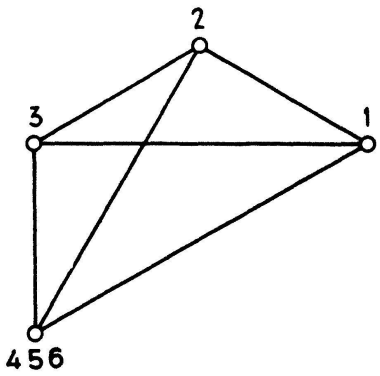
Nr. 26. Unter der ch omatischen Zahl k eines Streckenkomplexes P versteht man die kleinste Klassenanzahl, für die es eine Klasseneinteilung (Färbung) der Punkte von P so gibt, dass nicht zwei derselben Klasse angehörende Punkte benachbart, das heisst durch eine Strecke des Komplexes P verbunden sind. Ein Zusammenzug von P ist eine Reduktion, die dadurch zustande kommt, dass zwei benachbarte Punkte von P identifiziert werden; eine solche führt den Komplex P mit n Punkten in einen reduzierten Komplex P' mit $n' = n - 1$ Punkten über. Hierbei sollen zwei Punkte von P' genau dann benachbart sein, wenn diesr in P bei sinngemässer Berücksichtigung der Identität der zum Zusammenzug kommenden Punkte ebenfalls



Figur 1



Figur 2



Figur 3

benachbart sind. Lässt sich P durch aufeinanderfolgende Zusammenzüge in Q verwandeln, so sagen wir dafür auch, dass man P auf Q zusammenziehen könne. Ein Simplex S_i sei ein aus i Punkten bestehender Komplex, für den alle Punktepaare benachbart sind. Von Interesse ist die Frage, ob sich ein vorgegebener zusammenhängender Komplex P auf ein Simplex S_i mit vorgeschriebenem i zusammenziehen lässt. Es scheint nämlich, dass das Problem der chromatischen Zahlen innerhalb der Theorie der allgemeinen Streckenkomplexe in enge Beziehung zur Frage der Zusammenziehbarkeit auf Simplexe tritt[1]). Vermutlich gilt der folgende Satz:

Ein zusammenhängender Streckenkomplex P der chromatischen Zahl k lässt sich auf ein Simplex S_k zusammenziehen.

Beispielsweise zeigt Figur 1 einen einfachen Streckenkomplex mit den Punkten 1 bis 6, dem die chromatische Zahl $k = 4$ zukommt; eine zulässige Färbung ist durch die Klasseneinteilung (1 4), (3 6), (2), (5) gegeben. Man überzeugt sich mühelos davon, dass eine Färbung mit weniger als vier Farben unmöglich ist. Nach unserer Vermutung muss sich der vorliegende Komplex auf ein S_4 zusammenziehen lassen. Dies gelingt in der Tat durch zwei Zusammenzüge leicht, wie dies die Figuren 2 und 3 illustrieren.

[1]) Diese Zusammenhänge wurden einlässlicher erstmals studiert von K. WAGNER, *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, Math. Ann. *114*, 570–590 (1937).

Der vermutete Satz wurde bisher lediglich für $k \leqq 4$ bewiesen[2]). Seine Richtigkeit für $k = 5$ würde indessen die Gültigkeit des berühmten Vierfarbensatzes in sich schliessen. In der Tat: Wäre etwa T ein in der Ebene schlicht liegender Komplex, dessen Strecken sich also nirgends überschneiden (bei der schlichten Einbettung eines Komplexes in eine Fläche sind die Strecken gegebenenfalls durch Kurvenbögen zu ersetzen), und würde für die chromatische Zahl von T noch $k \geqq 5$ gelten, so liesse sich T auf ein S_k zusammenziehen. Da aber ein Zusammenzug die Einbettbarkeit in die Ebene nicht stört, müsste das Simplex S_k in der Ebene schlicht realisierbar sein, was für $k \geqq 5$ ausgeschlossen ist. Also muss für ebene Komplexe $k \leqq 4$ sein, was mit dem zur Zeit noch unbewiesenen Vierfarbensatz gleichbedeutend ist.

Neuerdings wurden von DIRAC[3]) sehr eingehende Untersuchungen über das chromatische Problem angestellt und unter anderem gezeigt, dass die oben erörterte Vermutung sich in zahlreichen spezielleren Fällen als richtig erweist. Allgemein ist die Frage jedoch noch ungeklärt. H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Referat über zwei Arbeiten von Árpád Szabó

1. *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?*, Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae *4*, 109–152 (1956).

2. *Δείκνυμι als mathematischer Terminus für «beweisen»*, Maia [NS] *10* (2), 1–26 (1958).

Die Arbeiten von ÁRPÁD SZABÓ aus Budapest auf dem Gebiete der Geschichte der voreuklidischen Geometrie und der vorsokratischen Philosophie sind in den Kreisen der Fachgelehrten wohlbekannt und geschätzt. Die zwei Studien, die wir zu besprechen vorhaben, sind durch ihren Gehalt und durch neue Aufschlüsse über die Entstehungsgeschichte der griechischen Mathematik von ganz besonderer Wichtigkeit.

Gleich am Anfang des ersten Aufsatzes: *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?* legt uns der Verfasser in aller Deutlichkeit die drei Hauptthesen seiner Arbeit vor, die er zu beweisen beabsichtigt: 1. Die griechische Mathematik ist als deduktive Wissenschaft spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts unter dem Einfluss der eleatischen Philosophie entstanden. 2. Die Eleaten waren es, die schon *vor* dieser entscheidenden Wandlung zum ersten Mal in der Geschichte des europäischen Denkens die grundlegenden Prinzipien der Logik klar formulierten. 3. Die deduktive Mathematik ist so lange überhaupt nicht möglich, als der Mathematiker die Begründung seiner Sätze nicht auf eine schon vorhandene und bewusst angewandte Logik bauen kann.

Unter Bezugnahme auf die Arbeiten von BECKER und VAN DER WAERDEN stellt der Verfasser fest, dass wir in den Büchern IX, 21–36, und X, Appendix 27, der *Elemente* EUKLIDS ein sehr altes *Mathema* der Pythagoreer vom Geraden und Ungeraden aus der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts vor Christus besitzen (BECKER) und dass in dem Buche VII, 1–36, derselben *Elemente* ein anderes pythagoreisches *Mathema*, welches gegen Ende des 5. Jahrhunderts vor Christus entstanden sein soll, enthalten ist (VAN DER WAERDEN).

Weiter zeigt der Verfasser, dass die Methode des indirekten Beweisverfahrens ganz

[2]) G. A. DIRAC, *A Property of 4-Chromatic Graphs and Some Remarks on Critical Graphs*, J. London math. Soc. *27*, 85–92 (1952). H. HADWIGER, *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich *88*, 133–142 (1943).

[3]) G. A. DIRAC, *Map Colour Theorems Related to the Heawood Colour Formula*, J. London math. Soc. *31*, 460–471 (1956). G. A. DIRAC, *A Theorem of R. L. Brooks and a Conjecture of H. Hadwiger*, Proc. London math. Soc. *7*, 161–195 (1957).