Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 1

Artikel: Bemerkungen über die Verteilung der Primzahlen
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20314

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIV Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1959

Bemerkungen über die Verteilung der Primzahlen

Unter den ersten 100 Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... hat es 25 Primzahlen, unter den ersten 200 sind es deren 46, und in der Reihe von 1 bis 300 zählt man 62 Primzahlen. Es sei allgemein mit der üblichen Bezeichnung $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen, die sich unter den n ersten Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... vorfinden. Zum Beispiel $\pi(100) = 25$, $\pi(200) = 46$, $\pi(300) = 62$. Das Verhältnis $n : \pi(n) = v(n)$ gibt über das Verhalten der mittleren Verteilung der Primzahlen Auskunft. Es ist $v(100) = 4$, $v(200) = 4{,}3478\ldots$, $v(300) = 4{,}8387\ldots$ usw.

Versuche, die für jede natürliche Zahl $n > 1$ erklärte Funktion $v(n)$ durch eine möglichst einfache analytische Funktion wenigstens genähert darzustellen, zeigen bald, dass $v(n)$ ungefähr wie $\ln n$ zunimmt. Der erst 1896 unter Heranziehung beträchtlicher Hilfsmittel zum ersten Mal bewiesene sogenannte Primzahlsatz besagt, dass das Verhältnis $v(n) : \ln n$ mit wachsendem n dem Wert 1 unbegrenzt nahe kommt. Erst in unserem Jahrzehnt gelang es, allerdings nur unter dem Aufwand recht komplizierter Abschätzungen, einen Beweis zu geben, den man in bezug auf die verwendeten Hilfsmittel elementar nennen kann, obschon er keineswegs ohne weiteres verständlich ist[1]).

Im Bestreben, den Primzahlsatz einem weiteren Kreise nahezubringen, gelangt man bald dazu, die harmonische Reihe

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

zu Hilfe zu nehmen. Es ist dies reizvoll, weil die Bildung dieser Summe im Prinzip nur die vier Grundoperationen erfordert. Für grössere Werte von n braucht man freilich zur effektiven Berechnung transzendente Hilfsmittel. Es gilt

$$H(n) = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \pm \cdots,$$

wobei C die Eulersche Konstante 0,57721566490... bedeutet[2]).

Der Primzahlsatz stellt eine Aussage über das asymptotische Verhalten von $v(n)$ dar. Es gibt beliebig viele Funktionen, die asymptotisch gleich sind. Zum Beispiel

[1]) Eine eingehend durchgearbeitete Darstellung und viele interessante Einzelheiten findet man in dem vorzüglichen kleinen Buch: E. Trost, *Primzahlen* (Birkhäuser-Verlag, Basel 1953).

[2]) Siehe zum Beispiel H. Dörrie, *Unendliche Reihen* (Verlag R. Oldenbourg, München 1951), S. 549.

$\ln n$, $H(n)$ und der Quotient $n:\mathrm{Li}(n)$. Der letztere schmiegt sich der Funktion $v(n)$ besonders gut an.

Es ist nun bemerkenswert, dass die elementare Summe

$$h(n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$$

für $n > 50$ die Funktion $v(n)$ erstaunlich gut wiedergibt. Im Intervall von 50 bis 2000 erhält man mit ihr fast die genauen Werte der Anzahlen $\pi(n)$. Die folgende

n	$\pi(n)$	$v(n)$	$h(n)$	$\frac{n}{h(n)}$	$\frac{\pi(n)\,h(n)}{n}$
50	15	3,333	2,999	16,7	0,900
100	25	4,000	3,687	27,1	0,922
150	35	4,286	4,091	36,7	0,955
200	46	4,348	4,378	45,7	1,007
300	62	4,839	4,783	62,7	0,988
400	78	5,128	5,070	78,9	0,989
500	95	5,263	5,293	94,5	1,006
600	109	5,504	5,475	109,6	0,995
700	125	5,600	5,629	124,4	1,005
800	139	5,755	5,762	138,8	1,001
900	154	5,844	5,880	153,1	1,006
1000	168	5,952	5,985	167,1	1,005
2000	303	6,601	6,678	299,5	1,012
5000	669	7,474	7,595	658,3	1,016
10000	1229	8,137	8,288	1207	1,019
100000	9592	10,425	10,590	9443	1,016
1000000	78498	12,738	12,893	$7{,}76 \cdot 10^4$	1,012
10000000	664579	15,047	15,195	$6{,}58 \cdot 10^5$	1,010
100000000	5761455	17,357	17,498	$5{,}71 \cdot 10^6$	1,008
1000000000	50847534 [1])	19,667	19,800	$5{,}05 \cdot 10^7$	1,007
10000000000	455052512 [2])	21,975	22,083	$4{,}53 \cdot 10^8$	1,005

[1]) Der bis 1958 gewöhnlich angegebene, nach einem von MEISSEL stammenden Verfahren von BERTELSEN 1893 bestimmte Wert 50847478 hat sich jüngst um 56 als zu klein erwiesen; nach D. H. LEHMER, *On the Exact Number of Primes Less than a Given Limit*, Notices Amer. math. Soc. *6*, 357 (1958).

[2]) Dieser Wert ist von LEHMER angegeben worden (siehe obige Anmerkung).

Tabelle gibt darüber Auskunft. Würde man besondere Argumentwerte bevorzugen, so wäre die Näherung noch besser. Man kann sich kaum dem Gedanken entziehen, dass sich die Übereinstimmung aus den arithmetischen Eigenschaften von $h(n)$ einsehen lassen müsste.

Die Frage, in welcher Art durch die Strukturen, das heisst die Primzahlzerlegungen der ersten $n-1$ natürlichen Zahlen die Eigenschaften der Zahl n festgelegt werden, findet eine Antwort durch den sogenannten Pentagonalsatz. Dessen Entdeckung stellt ein Meisterstück von EULER dar. Obschon dieser Satz zu den schönsten mathematischen Erkenntnissen gehört, ist er leider heute zu wenig bekannt. In entsprechender Weise dargestellt, eignet er sich hervorragend dazu, einem grösseren Kreis

einen Einblick in das komplizierte Gewebe der natürlichen Zahlen zu vermitteln. Mit den folgenden Zeilen möge er seinem Inhalt nach kurz erläutert werden, ohne auf den nicht ganz einfachen Beweis einzutreten. Vielleicht wird damit eine Anregung gegeben, Schüler in einer Sonderstunde in das Reich der Zahlen einzuführen, auf eine Weise, die zu interessanten Übungen Anlass bietet.

Wir brauchen die beiden Sorten von Fünfeckzahlen, die folgendermassen gebaut sind:

		0^2	$= 0$
1^2	$= 1$	$1 + 1^2$	$= 2$
$1 + 2^2$	$= 5$	$1 + 2 + 2^2$	$= 7$
$1 + 2 + 3^2$	$= 12$	$1 + 2 + 3 + 3^2$	$= 15$
$1 + 2 + 3 + 4^2$	$= 22$	$1 + 2 + 3 + 4 + 4^2$	$= 26$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5^2$	$= 35$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5^2$	$= 40$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6^2$	$= 51$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6^2$	$= 57$
.....		.....	

Es handelt sich also um die Zahlen der Form

$$\frac{1}{2}\, k\,(3\,k - 1) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

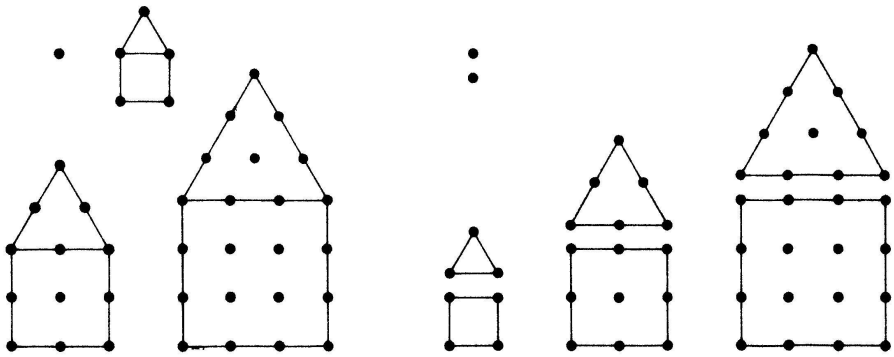
bzw.

$$\frac{1}{2}\, k\,(3\,k + 1) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

oder zusammengefasst um die Zahlen

$$\frac{1}{2}\, l\,(3\,l - 1) \quad \text{für} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Die folgenden Figuren zeigen, wie sie geometrisch zustande kommen; man kann auch regelmässige Fünfecke zu Hilfe nehmen.



Ordnet man die Fünfeckzahlen

$$\frac{1}{2}\, l\,(3\,l - 1)$$

nach zunehmendem l, so erhält man die arithmetische Reihe zweiter Ordnung

$$\ldots, 126, 100, 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, \ldots,$$

deren erste Differenzenreihe den konstanten Schritt 3 aufweist.

Ohne den Inhalt des Partitionssatzes nachfolgend zu gebrauchen, sei ferner bemerkt, durch welche rein arithmetischen Eigenschaften die Fünfeckzahlen gekennzeichnet sind. Zu diesem Zwecke zählen wir ab, auf wie viele Arten eine natürliche Zahl n als Summe von verschiedenen natürlichen Zahlen dargestellt werden kann. Je nachdem die Anzahl der Summanden gerade oder ungerade ist, nennen wir die Partition oder Zerfällung gerade oder ungerade.

Zum Beispiel besitzt 10 die geraden Zerfällungen

$$9+1, \quad 8+2, \quad 7+3, \quad 6+4, \quad 4+3+2+1$$

und die ungeraden

$$10, \quad 7+2+1, \quad 6+3+1, \quad 5+4+1, \quad 5+3+2.$$

Die Zahl 12 besitzt die geraden Zerfällungen

$$11+1, \quad 10+2, \quad 9+3, \quad 8+4, \quad 7+5, \quad 6+3+2+1, \quad 5+4+2+1$$

und die ungeraden

$$12, \quad 9+2+1, \quad 8+3+1, \quad 7+4+1, \quad 6+5+1, \quad 7+3+2, \quad 6+4+2, \quad 5+4+3.$$

Der Eulersche Partitionssatz besagt [3]:

Ist n keine Fünfeckzahl, so ist die Anzahl der geraden Partitionen von n gleich der Anzahl der ungeraden Partitionen. Für eine Fünfeckzahl

$$\frac{1}{2}\, k\,(3\,k \pm 1)$$

hingegen ist die Anzahl der geraden Zerfällungen um 1 grösser oder kleiner als die Anzahl der ungeraden Zerfällungen, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Dieser Satz stellt für den Beweis des nachfolgend geschilderten Sachverhalts den Kern dar.

Wir markieren in der Reihe der natürlichen Zahlen die Fünfeckzahlen:

1	**2**	3	4	**5**	6	**7**	8	9	10	11	**12**
13	14	**15**	16	17	18	19	20	21	**22**	23	24
25	**26**	27	28	29	30	31	32	33	34	**35**	36
37	38	39	**40**	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	**51**	52	53	54	55	56	**57**	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	**70**	71	72

. . . . . .

Ist nun die natürliche Zahl n gegeben, so bestimmen wir die Überschüsse gegenüber den vorangehenden Fünfeckzahlen, also die Zahlen

$$n-1, \quad n-2, \quad n-5, \quad n-7, \quad n-12, \quad n-15, \quad \ldots.$$

---

[3]) Siehe zum Beispiel HARDY-WRIGHT, *Einführung in die Zahlentheorie* (Verlag R. Oldenbourg, München 1958), S. 325 f.

Dann berechnen wir für jeden Überschuss die Summe seiner sämtlichen Teiler. Die Summe aller Teiler der Zahl m, deren Primzahlzerlegung $p^a q^b r^c \ldots$ heisst, beträgt, wie man sofort erkennt:

$$s_m = (1 + p + p^2 + \cdots + p^a)\,(1 + q + \cdots + q^b)\,(1 + r + \cdots + r^c) \cdots .$$

Für $n = 80$ ergeben sich die Überschüsse

$$79,\quad 78,\quad 75,\quad 73,\quad 68,\quad 65,\quad 58,\quad 54,\quad 45,\quad 40,\quad 29,\quad 23,\quad 10,\quad 3.$$

Die Teilersummen dieser Überschüsse betragen

$$s_{79} = 80,\quad s_{78} = 168,\quad s_{75} = 124,\quad s_{73} = 74,\quad s_{68} = 126,\quad s_{65} = 84,\quad s_{58} = 90,$$
$$s_{54} = 120,\quad s_{45} = 78,\quad s_{40} = 90,\quad s_{29} = 30,\quad s_{23} = 24,\quad s_{10} = 18,\quad s_3 = 4.$$

Jetzt werden diese Teilersummen abwechselnd zu zweien addiert und subtrahiert, wobei bei einer ungeraden Anzahl am Schlusse nur noch ein Glied zu addieren oder zu subtrahieren ist:

$$80 + 168 - 124 - 74 + 126 + 84 - 90 - 120 + 78 + 90 - 30 - 24 + 18 + 4$$

mit dem Resultat 186. Dies stellt die Teilersumme von 80 dar!

Allgemein besteht für jede natürliche Zahl n, die nicht eine Fünfeckzahl ist, der merkwürdige Sachverhalt:

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-5} - s_{n-7} + s_{n-12} + s_{n-15} - \cdots . \tag{1}$$

Eine einfache Verabredung ermöglicht es, auch die Fünfeckzahlen selbst einzubeziehen. Ist n eine solche, so tritt zuletzt der Überschuss Null auf. Als Glied in der Folge der Teilersummen ist dann für s_0 die Fünfeckzahl n zu nehmen. Das derart erweiterte Gesetz (1) ist dann für jede natürliche Zahl n gültig.

Zum Beispiel heissen für $n = 26$ die Überschüsse

$$25,\quad 24,\quad 21,\quad 19,\quad 14,\quad 11,\quad 4,\quad 0.$$

Als Folge der Teilersummen haben wir

31, 60, 32, 20, 24, 12, 7 und 26 mit $31 + 60 - 32 - 20 + 24 + 12 - 7 - 26 = 42.$

Tatsächlich ist $s_{26} = 42$.

Die Fünfeckzahlen, unter denen nur 2, 5 und 7 Primzahlen sind, was leicht einzusehen ist, haben also am Gewebe der gegenseitigen Beziehungen der natürlichen Zahlen massgeblichen Anteil. Eine Zahl n ist dann und nur dann Primzahl, wenn (1) den Wert $s_n = n + 1$ liefert. Die Strukturen von Zahlen, die kleiner als n sind, nämlich der Überschusszahlen, legen unter anderem auch fest, ob n Primzahl ist. Man kann also aus den ersten $n - 1$ Zahlen mit dem endlichen Ausdruck (1) berechnen, ob n Primzahl ist; freilich treten in der Berechnung mit den Teilersummen Zahlen auf, die grösser als n sind. Der Sachverhalt ist geeignet, einen Einblick in die komplizierten Gesetze der so einfach erscheinenden Zahlenreihe zu vermitteln.

L. LOCHER-ERNST