

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 14 (1959)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 05.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die Gleichungen (1), (2) und (3) ergeben sich durch Anwenden von analytischen Hilfsmitteln. Insbesondere (3) legt die Frage nahe, wie sich dies rein arithmetisch begründen lässt, was doch zweifellos möglich sein sollte, da es sich um eine rein arithmetische Verflechtung der Pentagonalzahlen mit den Grössen  $s_n$  und  $p_n$  handelt.

L. LOCHER-ERNST

## Aufgaben

**Aufgabe 305.** A convex (irregular) polygon  $P$  with  $n$  sides is subdivided into convex polygons by  $d$  diagonals which do not intersect in the interior of  $P$ . Let  $S_n$  denote the number of all such subdivisions,  $d = 0, 1, 2, \dots, n - 3$ . Here is a short table:

$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

$$S_n = 1, 3, 11, 45, 197, 903.$$

Show (1) and (2):

$$S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} \binom{n-3}{k} 2^{n-3-k}, \quad (1)$$

$$S_n \equiv 1 \pmod{n} \quad (n = \text{prime}). \quad (2)$$

The problem is not new, but the form (1) of the solution seems to be new.

G. PÓLYA, Stanford University, USA

*Solution.* Denote the vertices of a polygon of  $n + 1$  sides by  $0, 1, 2, \dots, n$  and put  $V_1 = 1$ ,  $V_n = S_{n+1}$ . By considering diagonals through the vertex 0, we get the recursion formulas

$$V_2 = V_1,$$

$$V_3 = 2 V_2 + V_1^2,$$

$$V_4 = 2 V_3 + 4 V_1 V_2 + V_1^3,$$

$$V_5 = 2 V_4 + 4 V_1 V_3 + 4 V_2^2 + 6 V_1^2 V_2 + V_1^4,$$

and so on. Now put

$$g(x) = \sum_1^{\infty} V_n X^n, \quad h(x) = x + \sum_2^{\infty} 2 V_n X^n.$$

Then the above recurrences imply

$$g(x) - x = x \sum_1^{\infty} h^k(x) = \frac{x h(x)}{1 - h(x)}.$$

Since  $h(x) = 2 g(x) - x$ , this yields

$$2 g^2(x) - (1 + x) g(x) + x = 0. \quad (*)$$

The problem is therefore equivalent to SCHRÖDER'S second problem (see NETTO'S *Lehrbuch der Combinatorik*, pp. 196–198).

It follows from (\*) that

$$g(x) = \sum_1^{\infty} V_n X^n = \frac{1}{4} \{1 + x - (1 - 6x + x^2)^{1/2}\}.$$

Thus

$$V_n = -\frac{1}{4} P_n^{(-1/2)}(3),$$

where  $P_n^{(\lambda)}(x)$  denotes the ultraspherical polynomial (see for example SZEGÖ's *Orthogonal Polynomials*, p. 80). Using the formula

$$P_n^{(\lambda)} = \binom{n+2\lambda-1}{n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n F\left[-n, -n-\lambda+\frac{1}{2}; \lambda+1; \frac{x-1}{x+1}\right],$$

we find that (for  $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{2^{n-1}}{n(n-1)} \sum_{r=1}^n \frac{(-n)_r (-n+1)_r}{r!(r-1)!} 2^{-r-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n}{r+1} \binom{n-2}{r} 2^{n-2-r}, \end{aligned}$$

hence

$$S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{r=0}^{n-3} \binom{n-1}{r+1} \binom{n-3}{r} 2^{n-3-r}.$$

Finally for  $n = p$  (prime), since

$$\binom{p-1}{r+1} \equiv (-1)^{r+1} \pmod{p}, \quad S_p \equiv \sum_{r=0}^{p-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} 2^{p-3-r} \equiv (2-1)^{p-3} \equiv 1 \pmod{p}.$$

L. CARLITZ, Durham, N. C. (USA)

*Solution by the proposer:* (1) Define

$$S_2 = 1 \quad \text{and} \quad y = \sum_{n=2}^{\infty} S_n x^{n-1}.$$

Choose one of the  $n$  sides of the polygon  $P$  as its *base*. The number of those subdivisions of  $P$  in which the base is a side of a subpolygon having  $k+1$  sides is the coefficient of  $x^{n-1}$  in the expansion of  $y^k$ ; this fact can be established with or without picture-writing; cf. Amer. math. Monthly 63, 689-697, especially Figure 4 (1956). Therefore

$$y = x + y^2 + y^3 + y^4 + \dots$$

or

$$\frac{y}{1+y(1-2y)^{-1}} = x.$$

By LAGRANGE'S formula (cf. e. g. G. PÓLYA and G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. I, p. 124-125)  $(n-1) S_n$  is the coefficient of  $y^{n-2}$  in the expansion in powers of  $y$  of the expression

$$\begin{aligned} [1+y(1-2y)^{-1}]^{n-1} &= \sum_{k=-1}^{n-2} \binom{n-1}{k+1} y^{k+1} (1-2y)^{-k-1} \\ &= \sum_{k=-1}^{n-2} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n-1}{k+1} \binom{k+l}{l} 2^l y^{k+l+1}. \end{aligned}$$

Collecting the terms for which  $k+l+1 = n-2$  we obtain (1).

(2) If  $n$  is prime

$$\binom{n-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{n}$$

for  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . This result can be derived from WILSON'S theorem or by the

---

<sup>1)</sup>  $(a)_r = a(a+1)(a+2)\dots(a+r-1)$ .

following argument that involves the indeterminate  $x$ :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n-1} &= (1+x)^n (1-x+x^2-x^3+\dots) \\ &\equiv (1+x^n) (1-x+x^2-x^3+\dots) \\ &\equiv 1-x+x^2-\dots+x^{n-1} \pmod{n}.\end{aligned}$$

Comparing the coefficients on both sides, we obtain the asserted congruence. From (1) and from what we have just proved, it follows if  $n$  is a prime ( $n \geq 3$ )

$$S_n \equiv - \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^{k+1} \binom{n-3}{k} 2^{n-3-k} \equiv (2-1)^{n-3} \pmod{n}$$

which is the assertion (2).

We can prove (2) also independently from (1), by considering the subdivisions of a *regular* polygon  $P$ . In fact, the number of *different* subdivisions that can be obtained from each other by rotations of  $P$  is necessarily  $n$  when  $n$  is a prime number, provided that we except the undivided polygon (which is an 'improper' subdivision of itself by  $d=0$  diagonals).

Cf. E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, p. 196–198, and Edinburgh Mathematical Notes 1940, No. 32, p. I–XII, a note by I. M. H. ETHERINGTON and another by A. ERDÉLYI and I. M. H. ETHERINGTON.

**Aufgabe 306.** Die Kanten eines Simplexes ( $S_n$ ) des  $(n-1)$ -dimensionalen Raumes ( $R_{n-1}$ ) werden in je  $m=2k+1$  gleiche Teile geteilt. Die  $n-2$  Punkte des  $S_n$ , die nicht zu der betreffenden Kante gehören, bestimmen mit jedem Teilpunkte je einen  $S_{n-1}$  bzw. einen  $R_{n-2}$ . Die Teilpunkte einer jeden Kante bestimmen  $m-1$  verschiedene  $R_{n-2}$ , die wir der betreffenden Kante zuordnen.  $\binom{n}{2}$  je verschiedenen Kanten zugeordnete  $(n-2)$ -dimensionale Räume haben im allgemeinen keinen gemeinsamen Punkt.

a) Bestimme den kleinsten Wert von  $m$  so, dass wenigstens ein Knotenpunkt – das heisst ein gemeinsamer Punkt von  $\binom{n}{2}$  je verschiedenen Kanten zugeordneter  $R_{n-2}$  – entsteht.

b) Bestimme die Anzahl der Knotenpunkte beim kleinstmöglichen Wert von  $m$ .

J. SCHOPP, Budapest

*Lösung des Aufgabenstellers:* Wir teilen die Kanten des  $S_n$  vorläufig in eine gerade Anzahl gleicher Teile. Die den Kantenmittelpunkten zugeordneten  $R_{n-2}$  befriedigen die Forderung der Aufgabe, da ein jeder  $R_{n-2}$  den Schwerpunkt (Punktschwerpunkt) des Simplexes enthält. Jede Gerade, die eine Kantenmitte mit dem Schwerpunkte der ausserhalb der betreffenden Kante liegenden  $n-2$  Simplexpunkte verbindet, ist nämlich ein Teil des betreffenden  $R_{n-2}$  und geht durch den Schwerpunkt des Simplexes. Wenn man jetzt den Simplexpunkten verschiedene ganzzahlige Gewichte zuordnet und auf jeder Kante als Teilpunkt den gewichteten Schwerpunkt der Kantenendpunkte wählt, so werden die entstandenen  $(n-2)$ -dimensionalen Räume den gewichteten Simplexschwerpunkt als gemeinsamen Punkt enthalten.

a) Das Problem liegt also darin, die  $n$  verschiedenen ganzzahligen Gewichte der Simplexpunkte so zu wählen, dass  $m$  den kleinstmöglichen Wert annimmt.  $0 < G_1 < G_2 < \dots < G_n$  seien die verschiedenen ganzzahligen Gewichte. Wir bezeichnen mit  $t_{ik} = t_{ki}$  den grössten gemeinsamen Teiler von  $G_i$  und  $G_k$ , und es sei weiterhin  $G_{ik} = G_i/t_{ik}$  ( $G_{ik} \neq G_{ki}$ ) und  $x_{ik} = G_{ik} + G_{ki}$  ( $x_{ik} = x_{ki}$ ). Nun sollen die  $G_i$  so gewählt werden, dass das kleinste gemeinsame Vielfache  $V_n = m = 2h + 1$  der  $x_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; i \neq k$ ) seinen kleinstmöglichen Wert annimmt.

$x_{ik}$  ist ungerade, da  $V_n$  ungerade ist. Folglich muss von  $G_{ik}$  und  $G_{ki}$  die eine gerade und die andere ungerade sein. Hieraus folgt weiter, dass  $G_i$  und  $G_k$  den Faktor 2 in verschiedener Potenz enthalten müssen. Die Gewichtszahlen haben also folgende Form:

$$G_i = (2l_i + 1) 2^{\alpha+i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Da die Werte  $l_i$  beliebig sind, können wir  $l_i = l_k = l$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) wählen. Es sei

nun  $(2l + 1) 2^{\alpha+1} = \lambda$  (wo  $\lambda$  schon eine beliebige ganze Zahl bedeutet), dann wird

$$G_i = \lambda \cdot 2^{i-1}; \quad t_{ik} = \lambda \cdot 2^{i-1} \quad (i < k); \quad G_{ik} = 1; \quad G_{ki} = 2^{k-i}; \quad x_{ik} = 2^{k-i} + 1.$$

Es ist aber  $0 < k - i < n$ , und  $k - i$  durchläuft sämtliche ganzzahligen Werte von 1 bis  $n$ . Das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache ist also

$$V_n = \{2^1 + 1, 2^2 + 1, \dots, 2^{n-1} + 1\}.$$

Beispiele:  $V_3 = 15$  <sup>1)</sup>,  $V_4 = 45$ ,  $V_5 = 765$ ,  $V_6 = 8415$ ,  $V_7 = 109395$ .

b) Eine Zuordnung der gewonnenen Gewichtszahlen zu den Simplexpunkten ergibt einen einzigen Knotenpunkt. Die Anzahl der verschiedenen Zuordnungen, das heisst die Anzahl der Knotenpunkte, ist gleich der Anzahl der aus  $n$  Elementen gebildeten Permutationen. Es ist also  $K_n = n!$

**Aufgabe 307.** a) Man zeige, dass die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten in den ersten  $2^n$  Zeilen des Pascalschen Dreiecks  $3^n$  ist.

b) Gibt es eine natürliche Zahl  $m$  so, dass in den ersten  $m$  Zeilen des Pascalschen Dreiecks gleichviel gerade und ungerade Binomialkoeffizienten stehen?

F. LEUENBERGER, ZUOZ

*Lösung:* a) Wie sich bei Aufgabe 287<sup>2)</sup> ergab, enthält die  $\binom{q-1}{k}$  enthaltende  $q$ -te Zeile des Pascalschen Dreiecks  $A(q) = 2^r$  ungerade Zahlen, wobei  $r$  die Vielfachheit, mit der die Ziffer 1 in der Dualschreibweise von  $q - 1$  auftritt, bezeichnen soll. Gleichwertig mit dieser Aussage ist die Rekursion  $A(2^p + q) = 2 A(q)$  für  $1 \leq q \leq 2^p$  mit dem Beginn  $A(1) = 1$ .

Da nun die ersten  $2^n$  Zeilennummern, jede um 1 vermindert, durch die Gesamtheit der (höchstens)  $n$ -stelligen Dualzahlen geliefert werden, also durch die Anordnungen der Ziffern 0 und 1 auf  $n$  Plätze, gibt es darunter  $\binom{n}{r}$  Dualzahlen mit  $r$ -fachem Auftreten der Ziffer 1. Ist daher  $U(q)$  die Anzahl ungerader Binomialkoeffizienten in den ersten  $q$  Zeilen, so gilt

$$U(2^n) = \binom{n}{0} 2^0 + \binom{n}{1} 2^1 + \dots + \binom{n}{n} 2^n = (2 + 1)^n = 3^n,$$

was zu beweisen war.

b) Bedeutet  $H(m)$  die halbe Anzahl aller Binomialkoeffizienten bis und mit zur  $m$ -ten Zeile, so gilt offenbar  $H(m) = m(m + 1)/4$ . Für  $m = 2^p + q$  ( $1 \leq q \leq 2^p$ ) ergibt sich so  $H(2^p + q) > 4^{p-1}$ . Andererseits ist dann

$$U(m) = U(2^p) + \sum_{2^{p+1}}^m A(v) = 3^p + 2 U(q) \leq 3^p + 2 \cdot 3^p = 3^{p+1}.$$

Für  $p \geq 9$  ist

$$H(2^p + q) > 4^{p-1} > 3^{p+1} \geq U(2^p + q),$$

so dass die in Frage stehende Ungleichung  $H(m) = U(m)$  nur für  $m < 2^9$  erfüllt sein kann. Dass sie überhaupt nicht eintritt, könnte jetzt durch Abzählen in den ersten 512 Zeilen ermittelt werden (wobei auffällt, dass man bis zu  $\binom{18}{6}$  178 Koeffizienten, davon 89 ungerade, abgezählt hat); kürzer ergibt es sich wie folgt: Aus den Angaben unter

a) folgt bei Iteration der rekursiven Formel, dass für  $m = 2^{p_0} + 2^{p_1} + \dots + 2^{p_n}$ , wo für unsern Zweck  $8 \geq p_0 > p_1 > \dots > p_n \geq 0$  ist,  $U(m) = 3^{p_0} + 2 \cdot 3^{p_1} + \dots + 2^n \cdot 3^{p_n}$  gilt; letzteres ist sicher eine ungerade Zahl. Schreibt man aber  $m = 8x + y$ , so wird  $H(m) = m(m + 1)/4 = 16x^2 + 2x(2y + 1) + y(y + 1)/4$  nur für  $y = 3$  und  $y = 4$  ganzzahlig und ungerade; dabei fällt  $y = 4$  aus, denn  $m$  würde zu einer Viererzahl, somit wäre  $p_n \geq 2$  und damit  $U(m)$  eine Neunerzahl, wogegen  $H(m) \equiv 5(x^2 + 1) \pmod{9}$  ist, also nie  $\equiv 0 \pmod{9}$ . Mit  $y = 3$  wird nun  $p_n = 0$ ,  $p_{n-1} = 1$  und  $p_{n-2} \geq 3$ , wobei  $n \geq 2$

<sup>1)</sup> Vergleiche die Lösung von Aufgabe Nr. 280, El. Math. 12, 133 (1957).

<sup>2)</sup> El. Math. 13, 43 (1958).

vorausgesetzt werden darf, weil  $H(3) \neq U(3)$  ist. Diesmal ist nun  $U(8x+3) \equiv 2^n \pmod{3}$  und  $U(8x+3) \equiv 2^{n-1} \cdot 3 + 2^n \pmod{27}$ . Dagegen gilt  $H(8x+3) \equiv 16x^2 + 14x + 3 \equiv x(x+2) \pmod{3}$ ; für  $x = 3z$  und  $x = 3z+1$  ist dieser Dreierrest 0, für  $x = 3z+2$  aber 2.

Der Vergleich, zusammen mit der Feststellung, dass  $2^n \equiv 0 \pmod{3}$  unmöglich ist und  $2^n \equiv 2 \pmod{3}$  nur für ungerade  $n$  eintritt, zeigt, dass  $n$  eine der Zahlen 3, 5, 7 sein müsste, da ja  $n$  durch  $n < p_0 \leq 8$  beschränkt ist. Die entsprechenden 27er Reste von  $2^{n-1} \cdot 3 + 2^n$  sind aber 20, 26, 23, während  $H(8x+3)$  für die noch betrachteten Werte  $x = 3z+2$  die Kongruenzen  $H(8x+3) \equiv 144z^2 + 234z + 95 \equiv 9z^2 + 18z + 14 \pmod{27}$  liefert, also nur die 27er-Reste 14 und 5 lassen kann.  $H(m)$  und  $U(m)$  lassen daher nie gleiche Reste, können also auch nicht gleich sein, was zu beweisen war.

H. DEBRUNNER, Bern

Die Lösung von a) folgt mit den in der Lösung von Nr. 287 gegebenen Formeln  $f(2m) = f(m)$ ,  $f(2m-1) = 2f(m-1)$ , wo  $f(m)$  die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten  $\binom{m}{k}$  ist, in folgender Weise mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} f(m) = \sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} f(2m) + \sum_{m=1}^{2^n-1} f(2m-1) = \sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} f(m) + 2 \sum_{m=1}^{2^{n-1}-1} f(m-1) = 3 \sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} f(m).$$

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), L. CARLITZ (Durham, N. C., USA), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München). Eine Lösung von a) allein sandte P. STOLL (Bolligen).

### Neue Aufgaben

346. Wieviele modulo einer Primzahl  $p$  irreduzible, ganzzahlige Polynome mit dem ersten Koeffizienten 1 gibt es, wenn modulo  $p$  kongruente Polynome nicht unterschieden werden?  
H. LENZ, München
347. In einer Ebene sind die Kreise  $K$ ,  $K'$  und die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  gegeben. Gesucht werden die Punkte  $X_1, X_2, X_3$  auf  $K$  und  $X'_1, X'_2, X'_3$  auf  $K'$ , so dass die drei Punkte-Quintupel  $X_1X_2X'_1X'_2P_3$ ,  $X_2X_3X'_2X'_3P_1$ ,  $X_3X_1X'_3X'_1P_2$  je auf einem Kreis liegen.  
C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht
348. Un triangle quelconque  $ABC$  admet une infinité de triangles inscrits  $MNP$  qui lui sont semblables. Indiquer une construction simple de ces triangles en supposant que  $\sphericalangle M = \sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle N = \sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle P = \sphericalangle C$ , et que  $M$  est sur  $BC$ ,  $N$  sur  $AC$  et  $P$  sur  $AB$ . Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles  $MNP$  ainsi que l'enveloppe de ces cercles.  
A. LOEFFLER, Pully-Rosiaz
349. Man beweise: Besitzt das Polynom  $f(z) = z^3 - 3az^2 + 3bz - c$  ( $a \neq 0$ ) mit komplexen, also zum Beispiel reellen Koeffizienten  $a, b, c$  eine mindestens doppelte Wurzel (sie heisse  $z = \zeta$ ), so ist, mit einem geeigneten Wert der Quadratwurzel,  $\zeta = (b - \sqrt{b^2 - ac})/a$  eine rationale Funktion  $\zeta = R(a, b, c)$  der 3 Koeffizienten; ebenso die eventuelle einfache Wurzel (sie heisse  $z = \eta$ ) von  $f(z)$ . Der Fall  $a = 0$  schliesst sich stetig an:  $\zeta = R(0, b, c)$ .  
I. PAASCHE, München

### Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

- Die Seite  $AB$  eines Dreiecks ist fest, die Seite  $AC$  hat eine feste Länge und dreht sich um  $A$ . Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunkts dieses Dreiecks?  
► Perspektiv-ähnliches Bild des geometrischen Ortes von  $C$ .

2. Ein Dreieck  $ABC$  hat einen festen Umkreis und zwei feste Ecken  $A$  und  $B$ . Man trägt auf  $AC$  die Strecke  $AU$  und auf  $BC$  die Strecke  $BV$  ab, dabei ist  $AU = BV = \text{const.}$  Welches ist der geometrische Ort der Mitte von  $UV$ ?  
 ▶ Kreis um die Mitte von  $AB$ .
3. Einem Kreise werden Dreiecke  $ABC$  einbeschrieben, bei denen  $AB$  und  $AC$  feste Richtungen haben. Der geometrische Ort des Höhenschnittpunktes ist eine Ellipse.
4.  $k_1$  und  $k_2$  sind zwei konfokale Kegelschnitte. Der geometrische Ort des Scheitelpunktes des rechten Winkels, dessen einer Schenkel  $k_1$  und dessen anderer  $k_2$  berührt, ist ein Kreis.
5.  $a$  ist eine drittprojizierende Gerade mit der ersten Kote 4;  $b$  ist eine erste Hauptgerade mit der ersten Kote 6, deren Winkel gegen  $a$   $50^\circ$  beträgt. Eine Kugel vom Radius 3 bewegt sich so, dass sie stets die beiden Geraden berührt. Zeichne den geometrischen Ort ihres Mittelpunktes.

## Bericht

### Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Bericht über die 62. Jahresversammlung am 27. September 1958 in Basel

Im Mittelpunkt der von über 100 Mitgliedern besuchten Versammlung standen die Vorträge der Herren Prof. Dr. J. JAUCH (Iowa) und Prof. G. CHOQUET (Paris), über welche anschliessend etwas ausführlicher referiert werden soll.

Von den Traktanden der *Geschäftssitzung* ist hervorzuheben: *Jahresbericht des Präsidenten*: Die definitive Bereinigung des Minimalprogramms für Mathematik und Physik. Das Programm ist im «Gymnasium Helveticum» veröffentlicht worden, und der eidgenössischen Maturitätskommission wurden Sonderdrucke zugestellt. – Der von der OECE (Genf) veranstaltete Fortbildungskurs für Physiker in Tutzing wurde von Kollegen aus 15 Ländern besucht. Von unserem Verein nahmen vier Mitglieder teil. Es wäre zu überlegen, ob wir in der Schweiz einen ähnlichen Kurs organisieren sollten.

Die *Berichte des Kassiers und der Lehrmittelkommissionen* bewegten sich in gewohnten Bahnen.

Der *neu gewählte Vorstand* setzt sich wie folgt zusammen: R. FLORIN, Chur, Präsident; W. SOERENSEN, Neuchâtel, Vizepräsident; Dr. G. HAUSER, Luzern, Kassier; B. OPP-LIGER, Chur, Sekretär; P. BOLLI, Genf, CH. ROTH, Genf und Dr. H. SCHILT, Biel, Beisitzer.

*Vortrag von Herrn Prof. Dr. Josef Jauch, Universität Iowa (USA):*

«Symmetrie und Elementarteilchen»

Die gewöhnlichen Symmetrien der klassischen Geometrie sind schon lange bekannt; sie können als Verschmelzung der beiden Fundamentalbegriffe der Transformation und der Invarianz aufgefasst werden. In der Physik wurden durch die Forderung der Invarianz gegenüber von Lorenz-Transformationen im vierdimensionalen Raum neue Beziehungen aufgedeckt (Relativitätstheorie). Die Quantenphysik brachte weitere Symmetrien durch lineare Transformationen im vieldimensionalen Hilbertschen Raum mit komplexen Grössen. Die  $S$ -Matrix, welche Vergangenheit und Zukunft der Elementarteilchen verknüpft, ist zwar noch nicht bekannt; sie wird aber durch Symmetrieforderungen sehr eingeschränkt. Aus diesen Symmetrien ergeben sich ebenfalls, wie in den klassischen Betrachtungen, ganz bestimmte Erhaltungssätze. Wichtig sind bei den neueren Betrachtungen vor allem die Raumumkehr, die Zeitumkehr und die Ladungskonjugation. Der Referent gibt Beispiele zu diesen, nicht so ohne weiteres evidenten Symmetrien und zeigt Konsequenzen derselben. Eine derselben ist die Ununterscheidbarkeit von links und rechts; bezüglich anderer sind experimentelle Untersuchungen im Gange (Polarisation der Emissionselektronen beim Betazerfall).