

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Kleine Mitteilungen

### Eine Verallgemeinerung der Fibonaccischen Zahlenfolge

In der Fibonaccischen Zahlenfolge ist jedes Glied gleich der Summe der beiden vorhergehenden; die Anfangsglieder sind 0 und 1. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konvergiert gegen das Teilverhältnis beim Goldenen Schnitt. Nachfolgend untersuchen wir eine Zahlenfolge, bei der jedes Glied die Summe der  $k$  vorhergehenden ist und die erforderlichen  $k$  Anfangsglieder nicht-negative reelle Zahlen sind.

Wir betrachten zunächst das Polynom

$$f(x) = x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 \quad (k > 1).$$

Seine Nullstellen seien  $x_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Nach der Descartesschen Zeichenregel<sup>1)</sup> hat  $f(x)$  genau eine (einfache) positive Nullstelle; wir nennen sie  $x_1$ . Wegen  $f(1) = 1 - k$  und  $f(2) = 1$  ist  $1 < x_1 < 2$ . Aus  $f(x_\nu) = 0$  folgt  $f(|x_\nu|) \leq 0$  und daraus für  $\nu = 2, 3, \dots, k$

$$|x_\nu| \leq x_1; \quad (1)$$

andernfalls hätte  $f(x)$  zwei positive Nullstellen.

$f(x)$  hat überhaupt nur einfache Nullstellen:

Wir bilden das Polynom  $g(x) = (x-1)f(x) = x^{k+1} - 2x^k + 1$ . Wäre  $\xi \neq 1$  mehrfache Nullstelle von  $f(x)$ , so wäre  $g'(\xi) = (k+1)\xi^k - 2k\xi^{k-1} = 0$ , also  $\xi = 0$  oder  $\xi = 2k/(k+1)$ , was unmöglich ist.

Aus  $g(x_\mu) = g(x_\nu)$  folgt für  $|x_\mu| = |x_\nu|$  die Gleichung  $|x_\mu - 2| = |x_\nu - 2|$  und für  $\mu \neq \nu$  daraus  $x_\mu = \bar{x}_\nu$ . Mit (1) können wir jetzt schliessen

$$|x_\nu| < x_1 \quad \text{für } \nu = 2, 3, \dots, k. \quad (2)$$

Nun wählen wir  $k$  Zahlen  $a_n \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, k-1$ ; es sei wenigstens ein  $a_n > 0$ . Aus dem linearen Gleichungssystem

$$a_n = \sum_{\nu=1}^k A_\nu x_\nu^n, \quad n = 0, 1, \dots, k-1,$$

lassen sich die  $k$  Grössen  $A_\nu$  eindeutig bestimmen, denn die Determinante des Systems ist die Vandermondesche Determinante<sup>1)</sup>

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{\mu > \nu} (x_\mu - x_\nu) \neq 0.$$

Es gilt  $A_1 = \Delta/V_k$ , wobei

$$\Delta = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n a_n V_k^{(n)} \quad (3)$$

und  $(-1)^n V_k^{(n)}$  der zum Element  $x_1^n$  gehörige Minor von  $V_k$  ist.

Indem wir in  $V_k^{(n)}$  zur ersten Zeile alle übrigen addieren, erhalten wir mit  $f(x_\nu) = 0$

<sup>1)</sup> Vergleiche zum Beispiel O. PERRON, *Algebra* (Berlin 1951).

und  $x_1 x_2 \cdots x_k = (-1)^{k-1}$  nach einigen Umformungen die Beziehung

$$V_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n+k-1}}{x_1} V_{k-1} - \frac{1}{x_1} V_k^{(n-1)}, \quad 0 \leq n < k;$$

dabei ist  $V_{k-1}$  die Vandermondesche Determinante für  $x_2, x_3, \dots, x_k$  und  $V_k^{(-1)} = 0$ .

Daraus folgt

$$V_k^{(n)} = (-1)^{n+k-1} V_{k-1} \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu}, \quad 0 \leq n < k.$$

Nach (3) ist somit

$$\Delta = (-1)^{k-1} V_{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu} \neq 0,$$

also

$$A_1 \neq 0. \tag{4}$$

Jetzt bilden wir die Zahlenfolge

$$a_n = \sum_{v=1}^k A_v x_v^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dann gilt

$$a_{n+k} = \sum_{v=1}^k A_v x_v^{n+k} = \sum_{v=1}^k A_v \sum_{\mu=n}^{n+k-1} x_v^\mu = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \sum_{v=1}^k A_v x_v^\mu,$$

das heisst

$$a_{n+k} = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} a_\mu.$$

Für den Quotienten

$$\sigma_m^{(r)} = \frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{\sum_{v=1}^k A_v x_v^{m+r}}{\sum_{v=1}^k A_v x_v^m} = \frac{A_1 x_1^r + \sum_{v=2}^k A_v x_v^r \left(\frac{x_v}{x_1}\right)^m}{A_1 + \sum_{v=2}^k A_v \left(\frac{x_v}{x_1}\right)^m}$$

ergibt sich wegen (2) und (4)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m^{(r)} = x_1^r.$$

A. SCHÖNHOFER und K. ZUSER, München

## Aufgaben

**Aufgabe 308.** Es bedeute  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{1, 2, \dots, n\}}$$

irrational ist.

P. ERDÖS

*Lösung:* Wir verwenden den Primzahlsatz in der Form  $\{1, 2, \dots, n\} = e^{n+o(n)}$ . Hieraus folgt

$$\{1, 2, \dots, n\}^{-1} = e^{-n} (1 + o(n)).$$

---

<sup>1)</sup> Vergleiche E. TROST, *Primzahlen*, S. 56. Mit  $o(n)$  wird eine Grösse bezeichnet, die für  $n \rightarrow \infty$  nach Null strebt.