

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 14 (1959)
Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 21.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- [12] KAKUTANI, S., *A Proof that There Exists a Circumscribing Cube Around any Closed Bounded Convex Set in R^3* , Ann. Math., Princeton 43, 739–741 (1942).
- [13] LIVESAY, G. R., *On a Theorem of F. J. Dyson*, Ann. Math., Princeton, 227–229 (1954).
- [14] MIRA FERNANDES, A. DE, *Funzioni continue sopra una superficie sferica*, Portugaliae Math. 5, 132–134 (1946).
- [15] POINCARÉ, H., *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (3^e partie), J. Math. pures appl. [4] 7, 167–244 (1885).
- [16] SPERNER, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6, 265–272 (1928).
- [17] YAMABE, H., and Z. YUJOGO, *On the Continuous Function Defined on a Sphere*, Osaka math. J. 2, 19–22 (1950).

Ungelöste Probleme

Nr. 29. Existe-t-il une infinité de nombres premiers p de la forme $8k + 1$ tels que le nombre 2 appartient mod p à un exposant impair? (Tels sont par exemple les nombres 17, 41, 97.)

On peut démontrer que pour p premiers de la forme $8k + 3$ ou $8k + 5$ le nombre 2 appartient à un exposant pair et que pour p premiers de la forme $8k + 7$ le nombre 2 appartient à un exposant impair. MM. BROWKIN et MAKOWSKI ont remarqué qu'il existe une infinité de nombres premiers p de la forme $8k + 1$ tels que le nombre 2 appartient mod p à un exposant pair: tels sont, par exemple, tous les facteurs premiers des nombres de FERMAT $2^{2^n} + 1$, où $n = 2, 3, \dots$.

Il est encore à remarquer que M. A. SCHINZEL a déduit de son hypothèse H sur les nombres premiers [énoncée dans Acta Arithmetica 4, 188 (1958)] que la réponse à notre problème est positive. W. SIERPIŃSKI

Nr. 30. M. S. ROLEWICZ a demandé si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma(n)}{n} = +\infty,$$

où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs naturels du nombre n . La réponse à cette question est négative. En effet, A. RÉNYI a démontré (dans le journal Izwiestia A. N. SSSR. 1948, 57–78) qu'il existe une infinité de nombres premiers n tels que $n + 2$ a au plus k diviseurs premiers (où k est une constante absolue). Pareillement on peut démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers n tels que $n + 1$ a au plus k diviseurs premiers. Pour un tel n , $\sigma(n)$ a au plus k diviseurs premiers et le nombre $\sigma \sigma(n)/\sigma(n)$ est borné, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma(n)}{n} < +\infty.$$

Le problème se pose si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma \sigma(n)}{n} < +\infty$$

et, généralement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\sigma \sigma \dots \sigma}^{k \text{ fois}}(n)}{n} < +\infty.$$

Je ne connais pas la réponse à ce problème, mais je pense qu'elle est positive.

A. SCHINZEL

Kleine Mitteilungen

Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des n -dimensionalen Simplex

Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt P des n -dimensionalen Simplex A_i ($i = 1, \dots, n+1$) schneiden die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume in B_i ($i = 1, \dots, n+1$). Bezeichnen wir mit R_i ($i = 1, \dots, n+1$) die Strecke $\overline{PA_i}$, mit d_i die Strecke $\overline{PB_i}$, so gilt bekanntlich¹⁾ die Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geq \frac{n(x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{n+1})^{1/n}}{x_i},$$

wenn man die entsprechenden baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich der Simplexeckpunkte mit x_i ($i = 1, \dots, n+1$) bezeichnet. Nach einfacher Umformung folgt aus obiger Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geq \frac{n \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{1/n}}{x_i^{(n+1)/n}}. \quad (1)$$

Sei nun

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \quad (i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n+1), \quad (2)$$

dann gilt die folgende Ungleichung:

$$S_k \geq \binom{n+1}{k} n^k. \quad (3)$$

Beweis: Wendet man die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf (2) an, so folgt, dass

$$S_k \geq \binom{n+1}{k} \left(\prod_{i_1 < \dots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \right)^{1/\binom{n+1}{k}}, \quad (i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n+1), \quad (4)$$

da die Gliederanzahl von S_k sich als die Anzahl der Kombinationen k -ter Ordnung aus $n+1$ Elementen ergibt.

Aus (1) folgt, dass

$$\frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \geq \frac{n^k \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{k/n}}{\left(\prod_{i=i_1}^{i_k} x_i \right)^{(n+1)/n}}. \quad (5)$$

¹⁾ J. SCHOPP, *Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n -dimensionalen Raum*, *El. Math.* 13, 106–107 (1958).