

Schräggrisse als Hilfsmittel zur Konstruktion von Durchdringungskurven

Autor(en): **Tschupik, Josef P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 4

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20321>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

etwa $y_1 = p/q$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q . Nun können $m, n \geq 0$ so gewählt werden, dass

$$|q x_1 + n p - m q| \leq \frac{1}{2}$$

wird, also, wie anfangs gezeigt,

$$q \delta \leq q |x_1 + n y_1 - m| = |q x_1 + n p - m q| \leq \frac{1}{2}.$$

Somit haben die rationalen Funktionswerte von $f(x)$ beschränkte Nenner; sie werden ganzzahlig, wenn man sie mit einer geeigneten Zahl durchmultipliziert. Das war behauptet worden.

Nebenbei sieht man, dass *beschränkte* Funktionen, die den Voraussetzungen von Satz 3 genügen, notwendig periodisch sind.

Ein Beispiel für den in Satz 2 und Satz 3 betrachteten Lösungstyp ist die Funktion

$$f(x) = 2^{k+1}, \quad \begin{array}{l} \text{wenn } m-1 < x \leq m \text{ und } 2^k \text{ die grösste in } 3m+1 \neq 0 \\ \text{steckende Potenz von 2 ist (} m \text{ ganz, } k = 0, 1, \dots \text{).} \end{array}$$

Der genaue Wertevorrat besteht aus den Zahlen $2, 4, 8, \dots, 2^{k+1}, \dots$. Die Funktion ist durchweg linksseitig stetig und nur für ganzzahlige Werte von x unstetig.

Zum Abschluss sei noch auf ein bequemes Konstruktionsverfahren hingewiesen, das beliebig viele Lösungen von (1), nicht aber die allgemeine Lösung liefert. Man wähle irgendeine Untergruppe G in der additiven Gruppe R der reellen Zahlen und eine beliebige Abbildung g von R/G in G . Dann ist $f(x) = g(x+G)$ eine Lösung von (1).

R. WAGNER, Karlsruhe

Schrägrisse als Hilfsmittel zur Konstruktion von Durchdringungskurven

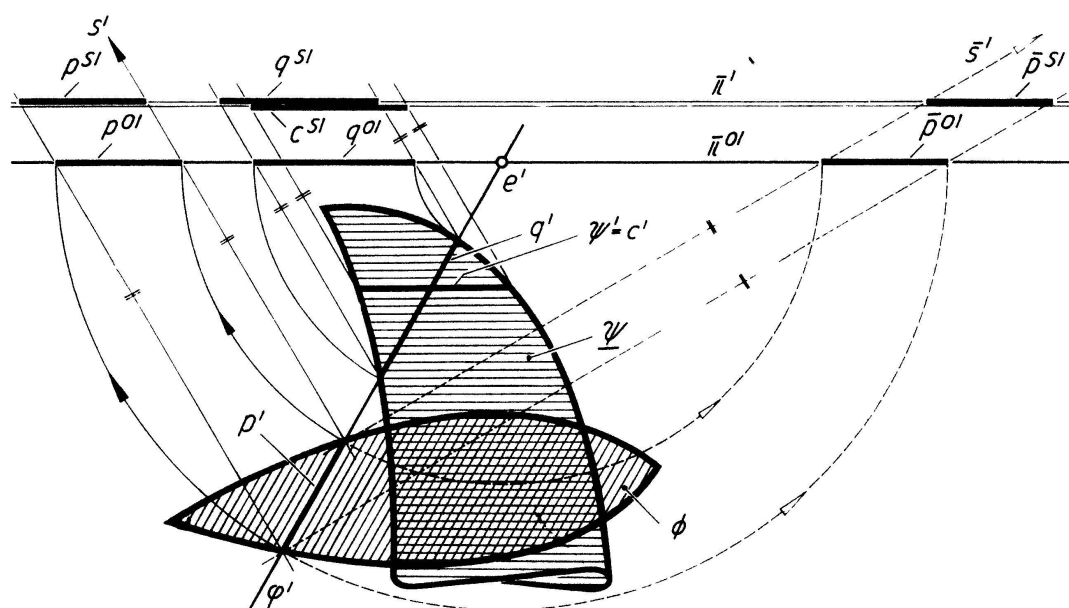
Zur Konstruktion der Durchdringungskurve k zweier Flächen Φ, Ψ zieht man im allgemeinen eine Schar günstig gewählter Hilfsflächen φ (meist Ebenen oder Kugeln) heran. Wird Φ von φ nach der Kurve p und Ψ von φ nach q geschnitten, so gehören die Schnittpunkte von p und q der Durchdringungskurve k an. So einfach diese Überlegung ist, so ermüdend gestaltet sich meist bei komplizierteren Flächen die praktische Durchführung wegen der rasch anwachsenden Zahl der Konstruktionslinien. – Unter der Voraussetzung, dass Φ und Ψ je eine Schar einigermassen leicht zu zeichnender Parallelschnitte aufweisen, soll nun gezeigt werden, wie man durch Verwendung bereits gezeichneter Konstruktionslinien den Zuwachs an Konstruktionslinien weitgehend drosseln kann. Es wird hier ausdrücklich der Zuwachs betont, da man sich leicht davon überzeugen kann, dass die Ermittlung der ersten Punkte von k bei den meisten Verfahren sowohl quantitativ- als auch qualitativmässig nahezu den selben Konstruktionsaufwand verlangt.

Voraussetzung

Die Fläche Φ möge von einer Schar paralleler Ebenen φ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) nach möglichst einfachen Kurven p_i geschnitten werden, analog die Fläche Ψ von einer Parallelebenenschar ψ_j nach Kurven c_j ($j = 0, 1, 2, \dots$). Die Ebenen φ_i sollen die Funktion der eingangs erwähnten Hilfsflächen übernehmen. – Da man durch Einführung zweier Seitenrisse stets erreichen kann, dass zwei beliebige Ebenen projizierend erscheinen, mögen φ_i und ψ_j künftig als erstprojizierend (das heisst $\perp \Pi_1$) vorausgesetzt werden.

Hilfsüberlegungen

φ, ψ seien Vertreter der Scharen φ_i, ψ_j ; Π^0 sei eine beliebige Ebene parallel zu ψ . φ kann man auf zwei Arten um ihre Spur e in Π^0 nach Π^0 drehen (Figur 1). Die in φ



Figur 1

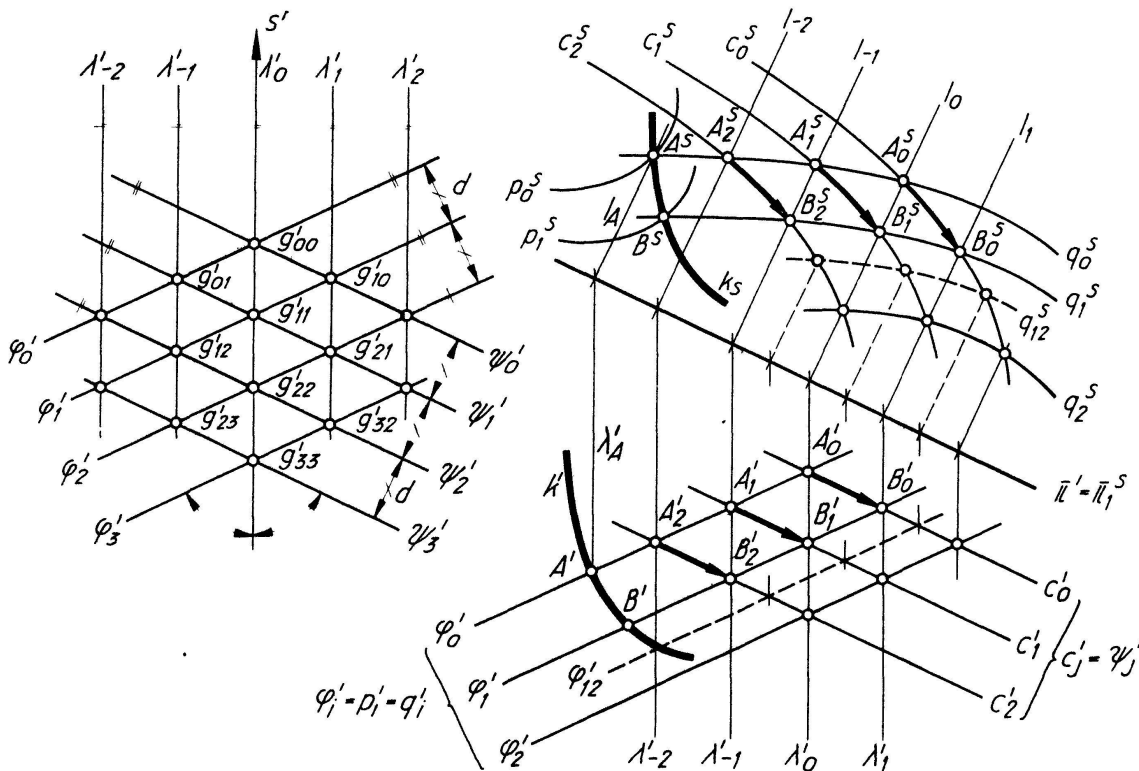
gelegenen Kurven p von Φ und q von Ψ gehen dadurch in kongruente Kurven p^0, q^0 (bzw. \bar{p}^0, \dots) in Π^0 über. Die Drehung von φ nach Π^0 ist bekanntlich durch die Parallelprojektion in der Drehsehnenrichtung s (bzw. \bar{s}) ersetzbar. s, \bar{s} sind zur Grundrissenebene Π_1 und zu je einer der Symmetrieebenen von φ und Π^0 – also auch von φ und ψ – parallel. Da die Parallelprojektion auf parallele Ebenen ψ, Π^0, Π kongruente Bilder liefert, gilt: *Im Schrägriss für die Sehstrahlrichtung s (oder \bar{s}) auf eine Ebene Π ($\Pi \parallel \psi_j$) wird jede Kurve p_i von Φ , q_i von Ψ und c_j von Ψ auf eine kongruente Kurve p_i^s, q_i^s bzw. c_j^s abgebildet. Wie man leicht einsieht, gilt dies auch für den Fall $\Pi \parallel \varphi_i$.*

Es seien nun sowohl die φ_i als auch die ψ_j äquidistant im Abstand d , weiter mögen die Indizes i, j in Richtung s gleichlaufend zu- oder abnehmen (Figur 2). Die Schnittgeraden g_{ii} aller Ebenenpaare φ_i, ψ_i mit gleichen Indizes liegen dann in derselben Ebene λ_0 . λ_0 ist Symmetrieebene von φ_i und ψ_i , also parallel zu s , und ihr Schrägriss ist daher eine Gerade l_0 . Mit anderen Worten, die Schnittgeraden g_{ii} je zweier Ebenen φ_i, ψ_i mit gleichen Indizes haben denselben Schrägriss l_0 . Analog folgt, dass die Schnittgeraden aller Ebenenpaare φ_i, ψ_j , für die $i - j = \tau = \text{const}$ ist, denselben Schrägriss l_τ haben.

Konstruktion der Durchdringungskurve k

In der vorhin besprochenen Anordnung der Parallelschnitte und des Schrägrisses mögen die Schrägbilder der Kurvenscharen c_j , p_i und der Ebenenschar λ_τ bereits gezeichnet vorliegen. Wir zeigen, dass abgesehen von Interpolationen ohne weitere Hilfslinien der Schrägriss des Systems der Schnittkurven q_i der Ebenen φ_i mit Ψ gezeichnet werden kann.

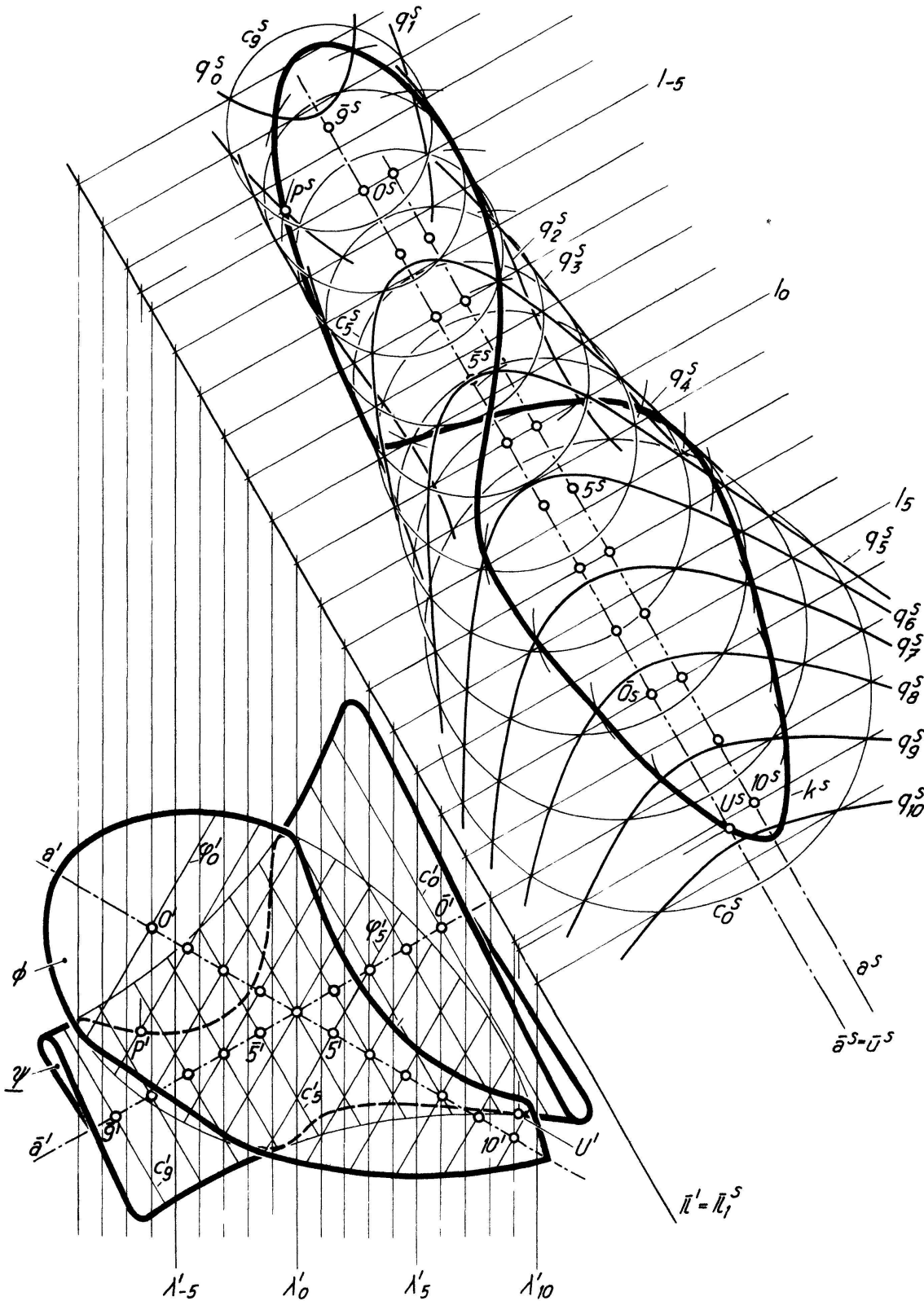
In Figur 3 schneidet die Ebene φ_0 die Kurven c_0, c_1, c_2, \dots der Reihe nach in Punkten A_0, A_1, A_2, \dots von q_0 , die bei der vorliegenden Annahme in den Ebenen $\lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \dots$ liegen müssen. Ihre Schrägrisse $A_0^s, A_1^s, A_2^s, \dots$ findet man daher als



Figur 2

Figur 3

Schnittpunkte von $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \dots$ mit $l_0, l_{-1}, l_{-2}, \dots$; durch $A_0^s, A_1^s, A_2^s, \dots$ ist q_0^s bestimmt, und der Schnittpunkt von q_0^s mit p_0^s ist bereits Bild eines Punktes A der Durchdringungskurve k . Durchläuft man jede der Kurven c_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) von A_j weg (in Pfeilrichtung) bis zum Schnitt mit φ_1 , so erhält man Punkte B_j der Kurve q_1 in φ_1 . Wie aus dem Grundriss ersichtlich, ist der Index der durch B_j gehenden Ebenen λ_τ um 1 grösser (bzw. kleiner bei entgegengesetzter Orientierung) als bei A_j , das heisst, man findet die Punkte B_j^s im Schrägriss, indem man die Kurven c_j^s von A_j^s weg bis zum Schnitt mit den Geraden l_τ vom nächsthöheren (bzw. nächstniedrigeren) Index verfolgt. Durch die B_j^s geht q_1^s ; der Schnitt von q_1^s mit p_1^s gibt den Punkt B^s von k^s usw. – Das Aufsuchen des Grundrisspunktes A' erfordert nur mehr zwei Hilfslinien, nämlich $l_A \parallel l_\tau$ durch A^s und $\lambda'_A \parallel \lambda'_\tau$ durch den Schnittpunkt von l_A mit Π' bis zum Schnittpunkt mit φ'_0 ; diese Linien wird man natürlich im allgemeinen nicht einzeichnen, sondern nur ihre Schnitte mit Π' bzw. φ'_0 markieren. Figur 3 zeigt auch (gestrichelt), wie man Zwischenpunkte aufsucht, indem man zum Beispiel im Grund-



Figur 4

riss die Gerade φ'_{12} als Bild einer Ebene φ_{12} und im Schrägriss die zugehörigen Geraden l interpoliert. – Die Schrägrisse der wahren ersten Umrisse von Φ, Ψ findet man als geometrische Orte der Berührungspunkte von Tangenten $\parallel l$ (die hier als Schrägrisse von Grundrißsehstrahlen aufgefasst werden) an die Kurven der Scharen p_i bzw. q_i und c_j .

Die Schnittpunkte von k mit dem wahren ersten Umriss lassen sich im Schrägriss ablesen und ermöglichen eine rasche Konstruktion der Umrisspunkte von k' .

Bei der praktischen Durchführung empfiehlt es sich, jenen Sehstrahl s auszuwählen, der in der Symmetrieebene des spitzen Winkels von φ und ψ liegt, weil dann die Schrägbilder von Kurven derselben Schar deutlicher getrennt erscheinen. Man wird auch nicht die Kurven p_i^s voll durchzeichnen, sondern nur jene Kurventeile, die für den Schnitt mit q_i^s gebraucht werden. Die Übersichtlichkeit des Schrägrisses gestattet hier meist eine rasche Abschätzung.

Figur 4 zeigt als Anwendung die Ermittlung der Durchdringungskurve k zweier Drehflächen Φ, Ψ mit windschiefen Achsen a, \bar{a} . Wir bezeichnen mit $0, 1, 2, \dots$ die Mittelpunkte der Parallelkreise p_i von Φ und mit $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$ die Mittelpunkte der Parallelkreise c_j von Ψ . Die Kreise c_j^s , die für die Ermittlung der q_i^s verwendet werden, sind im allgemeinen vollständig eingezeichnet, die Kreise p_i^s jedoch nur in den Schnittzonen. Figur 4 enthält *alle* Konstruktionslinien für die Ermittlung von k^s , zeigt aber das Aufsuchen der Grundrisspunkte nur für einen allgemeinen Punkt P und einen Umrisspunkt U von k . U^s ist einer der Schnittpunkte von k^s mit dem Schrägriss $\bar{u}^s = \bar{a}^s$ des wahren ersten Umrisses von Ψ . – Da man leicht die erste Spur e der von den Flächennormalen bezüglich Φ, Ψ in P aufgespannten Ebene findet, liesse sich auch die Tangente t' an k' in P' zeichnen; bekanntlich ist ja $t' \perp e'$.

Anwendungsbereich des Verfahrens

Wie eingangs erwähnt, eignet sich das Verfahren besonders für Flächen, die je ein System von einfach zu zeichnenden Parallelschnitten aufweisen, also Flächen, die ein System von ähnlichen oder kongruenten Kurven oder speziell von Kreisen und Geraden in parallelen Ebenen besitzen. Das heisst, es ist mit Vorteil anwendbar auf alle Drehflächen und Schraubflächen, auf Schiebflächen mit einer ebenen Schiebkurvenschar, auf Regelflächen mit einer Richtebene, auf Kegel, Gesimsflächen usw. Bei dreiachsigen Flächen zweiter Ordnung wird es zweckmässig sein, die Kreischnitte statt der Schnitte der Hauptebenenstellungen zu benützen.

Die Tatsache, dass bei Parallelprojektion die Kurven c auf affine Kurven c^s abgebildet werden, kann man auch benützen, um durch geeignete Wahl des Sehstrahls eine Vereinfachung der c^s zu erreichen, also zum Beispiel Ellipsen auf Kreise abzubilden. Aus der Bedingung $\lambda_i \parallel s$ folgt dann allerdings, dass im allgemeinen der Abstand der Parallelschnittebenen nicht mehr für beide Scharen gleich angenommen werden kann.

JOSEF P. TSCHUPIK, Graz

Ungelöste Probleme

Nr. 31. On peut démontrer que de tous trois entiers consécutifs > 7 au moins un a deux diviseurs premiers distincts. Le problème s'il existe une infinité des paires de nombres naturels consécutifs dont chacun a un seul diviseur premier se réduit à la recherche des nombres premiers de MERSENNE et de FERMAT [voir W. SIERPIŃSKI, Colloquium Mathematicum 6, 109 (1958)]. Le problème se pose quel est, pour un