

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ungelöste Probleme

Nr. 32. For real t let $\|t\|$ denote the positive distance between t and the integer nearest to t , and let f be a nonincreasing function such that $0 < f(n) < 1/2$ for $n = 1, 2, \dots$. It is a classical result of KHINTSCHINE that the inequality $\|n\alpha\| < f(n)$ has infinitely many solutions for almost all α or almost no α , according as the series $\sum f(n)$ diverges or converges. KHINTSCHINE's theorem can also be stated in this form: Let S_n be the interval symmetric about 0, of length $f(n)$, and let T_n be the union of all the translations of S_n through integer distances. Then the assertion ' $n\alpha \in T_n$ for infinitely many n ' is true for almost all α or almost no α , according as $\sum f(n)$ diverges or converges.

What can be said if S_n is a more complicated set in $[0,1]$, of total length (or measure) $f(n)$? On the basis of a crude probability argument, it is to be expected that the nature of S_n is immaterial, and that only its measure is of significance.

In case S_n consists of the intervals of length $f(n)/n^k$ symmetric about the points $0, 1/n^k, 2/n^k, \dots, (n^k - 1)/n^k$, where k is a fixed nonnegative integer, the relation $n\alpha \in T_n$ is equivalent to

$$\left| n\alpha - \frac{j}{n^k} - m \right| < \frac{f(n)}{n^k} \quad \text{for some integers } j, m$$

or

$$\|n^{k+1}\alpha\| < f(n). \quad (*)$$

It has recently been proved by ERDÖS¹⁾ in the case $k = 0$, and LE VEQUE²⁾ in the case $k > 0$, that if $\sum f(n)$ converges, inequality (*) has only finitely many solutions for almost all α , while if $\sum f(n)$ diverges, the number of solutions $n < N$ of (*) is, for almost all α , asymptotically equal to $\sum_1^N f(n)$. It is also shown²⁾ that the corresponding theorem holds with certain other sequences $\{a_n\}$ in place of $\{n^{k+1}\}$ in (*), but there appears to be nothing known about the situation when S_n is not composed of finitely many intervals.

A large part of the theory of diophantine approximations is susceptible of the same kind of generalization, in which inequalities are replaced by set inclusions. The proofs will require many new ideas.

W. J. LE VEQUE

Aufgaben

Aufgabe 322. Es sei $D_n = |a_{i,k}|$ die Determinante n -ten Grades, in der das allgemeine Element $a_{i,k}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von i und k ist. Man beweise, dass

$$D_n = n! \prod_{p \leq n} (1 - p)^{[n/p]},$$

wo das Produkt über alle Primzahlen $p \leq n$ erstreckt wird und $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leq \alpha$ bedeutet.

P. TURAN, Budapest

¹⁾ P. ERDÖS, *Two Theorems on Diophantine Approximation*, to appear in Acta Arithmetica.

²⁾ W. J. LE VEQUE, *On the Frequency of Small Fractional Parts in Certain Real Sequences*, III, to appear in J. reine angew. Math.

Lösung des Aufgabenstellers: Wir werten die allgemeinere Determinante $D_n(t) = |[i, k]^t|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) aus, wobei t eine reelle oder komplexe Zahl ist. Dazu betrachten wir zuerst die Determinante $\Delta_n(f) = |f((i, k))|$, wo (i, k) der grösste gemeinsame Teiler von i und k ist und $f(x)$ eine beliebige für $x = 1, 2, \dots, n$ definierte Funktion bedeutet. Für $m = 1, 2, \dots, n$ definieren wir $g(m)$ durch

$$g(m) = \sum_{d|m} \mu(d) f\left(\frac{m}{d}\right);$$

somit ist nach der Möbiusschen Umkehrformel

$$f(m) = \sum_{d|m} g(d). \tag{1}$$

Wir behaupten nun, dass

$$\Delta_n(f) = g(1) g(2) \cdots g(n). \tag{2}$$

Um (2) zu beweisen, sei

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i \equiv 0 \pmod{k}, \\ 0 & \text{für } i \not\equiv 0 \pmod{k}. \end{cases}$$

Für die Determinanten $B_1 = |a_{ik}|$ und $B_2 = |a_{ik} g(k)|$ gilt

$$B_2 = g(1) g(2) \cdots g(n) B_1.$$

Da die Hauptdiagonale von B_1 aus lauter Einsen besteht und über der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, so ist $B_1 = 1$ und $B_2 = g(1) g(2) \cdots g(n)$. Jetzt bilden wir das Produkt $B_1 B_2$ durch Komposition von Zeilen mit Zeilen. Das s -te Glied der r -ten Reihe von $B_1 B_2$ wird nach (1)

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} a_{sj} g(j) = \sum_{j|(r,s)} g(j) = f((r, s)).$$

Also ist $B_1 B_2 = \Delta_n(f)$, und (2) ist bewiesen¹⁾. Aus (2) folgt nicht nur der Wert von $D_n(t)$, sondern allgemeiner der Wert von $d_n(F) = |F([i, k])|$, wenn $F(x)$ für $x = 1, 2, \dots, n$ definiert ist und für alle positiven ganzen a und b die Bedingung

$$F(ab) = F(a) F(b) \tag{3}$$

erfüllt ist. Man hat nämlich

$$d_n(F) = \left| F\left(\frac{i k}{(i, k)}\right) \right| = \left| \frac{F(i) F(k)}{F((i, k))} \right| = (F(1) F(2) \cdots F(n))^2 \left| \frac{1}{F((i, k))} \right|.$$

Wenn man (2) mit $f(x) = 1/F(x)$ anwendet, so folgt

$$\begin{aligned} d_n(F) &= (F(1) F(2) \cdots F(n))^2 \prod_{m=1}^n \left(\sum_{d|m} \mu(d) \frac{1}{F\left(\frac{m}{d}\right)} \right) \\ &= F(1) F(2) \cdots F(n) \prod_{m=1}^n \sum_{d|m} \mu(d) F(d) \\ &= F(1) F(2) \cdots F(n) \prod_{m=1}^n \prod_{p|m} (1 - F(p)). \end{aligned}$$

¹⁾ (2) folgt auch aus Aufgabe 33, S. 122, in PÓLYA-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II.

Also ist

$$d_n(F) = F(1) F(2) \cdots F(n) \prod_{p \leq n} (1 - F(p))^{[n/p]}.$$

Da für $F(x) = x^t$ die Bedingung (3) erfüllt ist, so folgt

$$D_n(t) = (n!)^t \prod_{p \leq n} (1 - p^t)^{[n/p]}.$$

L. CARLITZ (Durham N.C./USA) benutzt das in ¹⁾ erwähnte Resultat. Er stellt den Zusammenhang mit der Formel von H. J. S. SMITH:

$$H_n = |(r, s)| = \varphi(1) \varphi(2) \cdots \varphi(n)$$

her in der Form

$$D_n = (-1)^e [1, 2, \dots, n] H_n, \quad e = \sum_{p \leq n} \left[\frac{n}{p} \right].$$

Weitere Lösungen sandten B. L. J. BRAAKSMA (Groningen) und R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England).

Aufgabe 323. Drei durch denselben Punkt O gehende Kreise $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ vom gleichen Halbmesser r mögen sich in drei weiteren Punkten P_{12}, P_{23}, P_{31} schneiden. Es ist zu zeigen, dass der Kreis \mathfrak{R} durch diese drei Punkte zu den gegebenen Kreisen kongruent ist.

H. HEINRICH, Dresden

1. Lösung: Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise liegen auf dem Kreis \mathfrak{R}' mit dem Radius r um O . Spiegelt man nun den Umkreismittelpunkt O eines Dreiecks an dessen Seiten, so «streckt» man das Seitenmittendreieck desselben aus O mit dem Vergrößerungsverhältnis 2:1 und erhält so ein zum gegebenen Dreieck zentralsymmetrisches Dreieck, dessen Umkreis \mathfrak{R} also kongruent mit \mathfrak{R}' ist. Bewerkstelligt man diese Spiegelungen durch die Schnittpunkte von Kreisen um die Ecken M_1, M_2, M_3 durch O , so bilden diese mit \mathfrak{R} gerade die fragliche Konfiguration.

G. UNGER, Dornach

Ähnliche Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), R. BEREIS (Dresden), J. BERKES (Szeged), B. L. J. BRAAKSMA (Groningen), S. ELGERSMA (Cornwerd, Holland), E. HERRMANN (Porz am Rhein), L. KIEFFER (Luxemburg), J. LANGR (Prag), J. A. PEDERSEN (Poulstrup, Dänemark), J. POGÁNY (Budapest), F. PROWAZNIK (Wien), G. SELTMANN (Dresden), J. SCHOPP (Budapest), E. SZODORAY (Debrecen).

2. Lösung: Wählt man den Grundpunkt O als Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems und fasst die Zeichenebene als Gaußsche Zahlenebene auf, dann werden die Mitten M_i ($i = 1, 2, 3$) der gegebenen drei Kreise k_i durch komplexe Zahlen M_i beschrieben (Punkte und entsprechende komplexe Zahlen sollen durch die gleichen lateinischen Grossbuchstaben gekennzeichnet werden), für deren Absolutbeträge die Relation

$$|M_1| = |M_2| = |M_3| = r \quad (1)$$

gilt. Die Restschnitte der Kreise k_i

$$P_{12} = M_1 + M_2, \quad P_{23} = M_2 + M_3, \quad P_{31} = M_3 + M_1 \quad (2)$$

haben von dem Punkt $M = M_1 + M_2 + M_3$ die Entfernungen

$$|\overrightarrow{P_{12}M}| = |M - P_{12}| = |M_3|, \quad |\overrightarrow{P_{23}M}| = |M - P_{23}| = |M_1|, \quad |\overrightarrow{P_{31}M}| = |M - P_{31}| = |M_2|,$$

die zufolge (1) alle gleich r sind. Damit ist die Kongruenz des Umkreises des Dreiecks $(P_{12}P_{23}P_{31})$ zu den gegebenen Kreisen k_i bewiesen und eine Konstruktion seiner Mitte M gegeben.

R. BEREIS, Dresden

Eine ähnliche Lösung sandten G. GEISE (Dresden) und R. C. YOUNG (London). Weitere Lösungen gingen ein von R. BEREIS (Dresden), J. BREJCHA (Brno), F. LEUENBERGER (ZuoZ), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), E. PETHES (Budapest), R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England), I. ZANA (Budapest).

Aufgabe 324. Man bestimme das Maximum des Umfanges eines der Einheitskugel einbeschriebenen rechtwinkligen windschiefen Fünfecks. E. TROST, Zürich

Lösung: Es seien A, B, C Punkte der Einheitskugel und A^*, B^*, C^* deren Spiegelbilder bezüglich des Kugelmittelpunktes. Falls die Strecken \overline{AB} und \overline{BC} einen rechten Winkel bilden, können sie zwei Nachbarseiten eines der Einheitskugel einbeschriebenen rechtwinkligen windschiefen Fünfecks $ABCDE$ sein. Für die anderen Fünfeckseiten gilt offenbar:

- (1) \overline{CD} ist eine Sehne des Kreises CA^*B^* .
- (2) \overline{DE} und $\overline{B^*C^*}$ liegen in derselben Ebene. (Man betrachte B, C, D als Ausgangspunkte und verwende die zu (1) analoge Aussage.)
- (3) \overline{EA} ist eine Sehne des Kreises AB^*C^* .
- (4) \overline{DE} und $\overline{A^*B^*}$ liegen in derselben Ebene. (Man betrachte E, A, B als Ausgangspunkte und verwende die zu (3) analoge Aussage.)

Aus (2) und (4) folgt:

- (5) \overline{DE} ist eine Sehne des Kreises $A^*B^*C^*$.

Weiterhin folgt aus (1), (3) und (5):

- (6) $D \equiv A^*$ oder $D \equiv B^*$ und (7) $E \equiv B^*$ oder $E \equiv C^*$.

Aus (6) und (7) folgt, dass zu den Punkten A, B, C nur folgende Fünfecke gehören können: $ABCA^*B^*$, $ABCA^*C^*$, $ABCB^*C^*$. Je vier Eckpunkte dieser Fünfecke liegen auf einem Grosskreis der Einheitskugel und bilden ein diesem Kreis eingeschriebenes Rechteck. Liegen zum Beispiel B, C, D, E auf einem Grosskreis, so ist ihre Lage durch die willkürlich gegebene Kugelsehne \overline{CD} eindeutig bestimmt. Bei festem \overline{CD} hat das Fünfeck maximalen Umfang, wenn $\overline{EA} = \overline{AB}$, denn von allen einem Kreis eingeschriebenen Dreiecken mit der festen Grundlinie \overline{EB} hat das gleichschenklige bekanntlich den maximalen Umfang. Setzen wir $\overline{CD} = x$, so erhalten wir für den Umfang y des Fünfecks den Ausdruck

$$y = x + x\sqrt{2} + 2\sqrt{4 - x^2}.$$

Hieraus folgt nach einfacher Rechnung

$$y_{max} = 2\sqrt{7 + 2\sqrt{2}}.$$

J. ERDÖSI, Budapest

Eine Lösung legten auch F. PROWAZNIK (Wien) und I. ZANA (Budapest) vor.

Aufgabe 325. Es sei $a_i = 2$ oder $a_i = 3$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Man beweise, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}$$

nur dann rational sein kann, wenn die Folge a_i periodisch ist. P. ERDÖS, Toronto

Lösung: Die Aufgabe lässt sich in der folgenden Weise verallgemeinern:
Es sei $a_i = a$ oder $a_i = b$, $i = 1, 2, 3, \dots$ mit $2 \leq a < b$. Man beweise, dass

$$\frac{1}{\alpha_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

nur dann rational sein kann, wenn die Folge a_i periodisch ist (a, b ganz).

Beweis: Wir setzen

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{a_\nu a_{\nu+1} \cdots a_k} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, \dots). \quad (1)$$

Dann ist

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{a_\nu} \left(1 + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} \right). \quad (2)$$

Es ist wegen $a_\nu = a$ oder b und $a < b$ für $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{1}{b-1} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{b^{k+1-\nu}} \leq \frac{1}{\alpha_\nu} \leq \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{a^{k+1-\nu}} = \frac{1}{a-1} \leq 1. \quad (3)$$

Wenn $a_\nu = a$, dann ergibt sich aus (2) und (3)

$$\frac{b}{a(b-1)} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{b-1} \right) \leq \frac{1}{\alpha_\nu} \leq \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{a-1} \right) = \frac{1}{a-1}.$$

Wenn $a_\nu = b$, dann ist

$$\frac{1}{b-1} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{b-1} \right) \leq \frac{1}{\alpha_\nu} \leq \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{a-1} \right) = \frac{a}{b(a-1)}.$$

Wegen $2 \leq a < b$ ist

$$\frac{a}{b(a-1)} < \frac{b}{a(b-1)}.$$

Die $1/\alpha_\nu$ fallen mithin in die beiden durchschnittsleeren Intervalle

$$I_1 = \left\langle \frac{1}{b-1}, \frac{a}{b(a-1)} \right\rangle, \quad I_2 = \left\langle \frac{b}{a(b-1)}, \frac{1}{a-1} \right\rangle.$$

Wenn

$$\frac{1}{\alpha_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

noch eine zweite Darstellung

$$\frac{1}{\alpha_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a'_1 a'_2 \cdots a'_k}$$

mit $a'_i = a$ oder b und mit $2 \leq a < b$ hat, dann muss $a_1 = a'_1$ sein, weil $1/\alpha_1$ nicht gleichzeitig in I_1 und in I_2 liegen kann. Nach (2) muss dann aber $1/\alpha_2 = 1/\alpha'_2$ sein. Jetzt kann man schliessen, dass $a_2 = a'_2$ ist, weil $1/\alpha_2$ nicht sowohl in I_1 als auch in I_2 liegen kann, usw. Für alle ν ist $a_\nu = a'_\nu$. Die Darstellung (1) ist eindeutig.

Aus (2) folgt

$$\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{a_\nu}{\alpha_\nu} - 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Ist $1/\alpha_1$ rational, das heisst $1/\alpha_1 = m/n$, dann ist auch $1/\alpha_2 = (a_1 m - n)/n$ rational mit dem gleichen Nenner. Entsprechend schliesst man für $\nu = 3, 4, \dots$. Alle $1/\alpha_\nu$ sind rational mit dem Nenner n . $1/\alpha_\nu$ ist also von der Form

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Unter den Zahlen $1/\alpha_\nu$ müssen gleiche vorkommen. Es sei etwa

$$\frac{1}{\alpha_{h+k}} = \frac{1}{\alpha_h}.$$

Dann folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung von $1/\alpha_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_{h+k} = a_h$$

und wegen (2)

$$\frac{1}{\alpha_{h+k+1}} = \frac{1}{\alpha_{h+1}}.$$

Daraus ergibt sich

$$a_{h+k+1} = a_{h+1} \quad \text{usw.}$$

Allgemein

$$a_{h+k+\nu} = a_{h+\nu},$$

das heisst, die Folge der a_ν ist periodisch.

E. HERRMANN, Porz am Rhein

Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass die Aussage der Aufgabe falsch wird, wenn a_i ausser 2 oder 3 auch 4 sein kann.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), J. C. BINZ (Bern), H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 326. Es sei m eine gegebene natürliche Zahl. Wieviele Tripel (i, j, k) natürlicher Zahlen gibt es, die den Bedingungen

$$i < j = i + 2p - 1 < k = j + 2q - 1 \leq 2m + 3$$

genügen?

R. LAUFFER, Graz

Lösung: Die Anzahl der Tripel sei $f(m)$. $f(m+1)$ setzt sich zusammen aus 1. den Tripeln mit $k \leq 2m+3$, 2. den Tripeln mit $k = 2m+4$ (für welche i gerade und $j > i$ ungerade ist), 3. den Tripeln mit $k = 2m+5$ (für welche i ungerade und $j > i$ gerade ist). Es ist also

$$f(m+1) = f(m) + \binom{m+2}{2} + \binom{m+3}{2} = f(m) + (m+2)^2.$$

Da $f(0) = 1$, so wird

$$f(m) = 1^2 + 2^2 + \dots + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

Weitere Lösungen legten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), E. HERRMANN (Porz am Rhein), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München) und R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England) vor.

Neue Aufgaben

362. Prove that the equation

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3$$

has no solution in non-negative integers x, y .

A. MAKOWSKI, Warsaw/Poland

363. Es sind bekannt der Umkugelradius R , der Inkugelradius r und der Winkel α zweier Nachbarkanten eines gleichflächigen Tetraeders. Man konstruiere das Tetraeder.

J. SCHOPP, Budapest

364. Man bestimme die Nullstellen des Polynoms

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^k \binom{k-n}{n} x^{k-2n}.$$

R. WAGNER, Karlsruhe

365. Es sei $n = 1, 2, 3, \dots$, $0 < a_1, a_2, \dots, a_n$ und $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Man beweise die Abschätzung

$$\frac{n}{\sum_{v=1}^n \frac{a_v}{s-a_v}} \leq n-1 \leq \frac{\sum_{v=1}^n \frac{s-a_v}{a_v}}{n},$$

die nur im Falle $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ Gleichheit ergibt.

I. PAASCHE, München

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

$$1. \quad \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)} = 1,$$

$$a \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)} = k,$$

$$a^2 \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)} = k^2.$$

2. Bilden die Zahlen x, y, z eine arithmetische Reihe, so ist das auch der Fall bei

$$x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + xz + z^2, \quad y^2 + yz + z^2.$$

3. Aus $abc = 1$ folgt

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1,$$

$$\frac{ab}{ab+a+1} + \frac{bc}{bc+b+1} + \frac{ca}{ca+c+1} = 1.$$

► Für die erste Identität: Erweitere den ersten Bruch mit c und kürze den zweiten durch b .

4. Die Gleichung

$$\frac{x}{y} \cdot z = \frac{x}{y} + z$$

soll in ganzen Zahlen gelöst werden.

► $x = (k+1)p$, $y = kp$, $z = k+1$.

5. Enthalten die Zahlen x und y den Faktor 3 nicht, so enthält $x^6 - y^6$ stets den Faktor 9.

► $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$, usw.