

Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

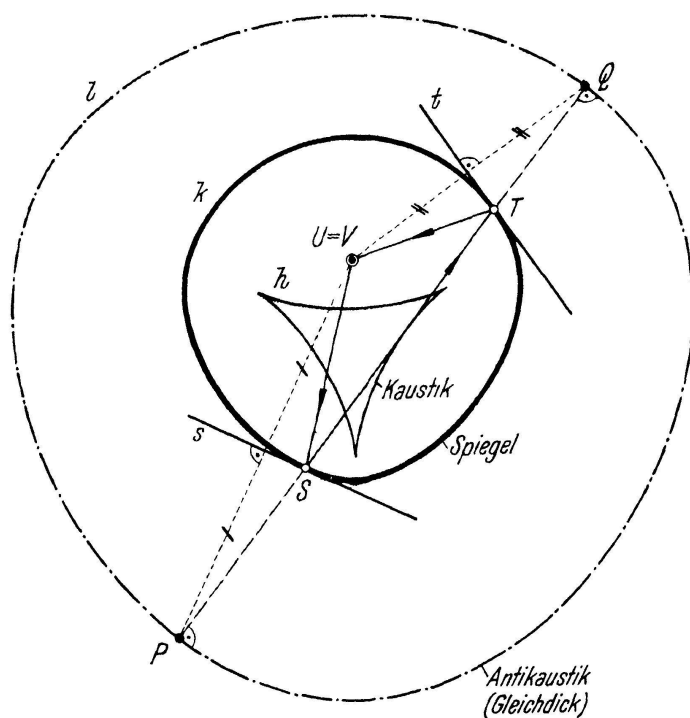
Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ungelöste Probleme

Nr. 35. Die Ellipse hat bekanntlich die Eigenschaft, alle von einem ihrer Brennpunkte ausgehenden Strahlen nach einmaliger Reflexion wieder im anderen Brennpunkt zu vereinigen. Es wird nun die Frage erhoben: Gibt es in der Ebene analytische, insbesondere algebraische Spiegelkurven, welche die von einem festen Zentrum U ausgehenden Lichtstrahlen nach zweimaliger Reflexion in einem anderen festen Punkt V sammeln?

Ausser in zwei Grenzfällen, nämlich für die Annahme zusammenfallender oder unendlich ferner Zentren, ist eine Antwort anscheinend nicht bekannt. Fest steht lediglich, dass nach einem Grundgesetz der geometrischen Optik der Lichtweg von U nach V konstante Länge hat. Die Schwierigkeit der Problemstellung liegt in der Forderung, dass die Spiegelkurve in ihrer Gesamtheit und nicht etwa bloss stückweise analytisch sein soll. Ohne diese Einschränkung liesse sich eine Lösung – die dann allerdings nur für einen gewissen Strahlensektor gültig wäre – beispielsweise aus zwei Ellipsenbögen zusammensetzen.



Figur 1

Die Frage nach jenen Spiegelkurven k , die das von einem eigentlichen Zentrum U ausgehende Strahlenbündel nach zweimaliger Reflexion an derselben Stelle $V=U$ wieder sammeln, ist 1745 von einem anonymen Geometer gestellt und im Jahr darauf von EULER beantwortet worden¹⁾. Die ohne Beweis mitgeteilte, ganz undurchsichtige Lösung erweist sich nach eingehender Analyse als nahe verwandt mit der folgenden,

¹⁾ L. EULER, *Solutio problematis catoptrici*, in his Actis A. 1745 Mense Septembri P. I pag. 523 propositi. Nova Acta Eruditorum 1746, 230–233.

so erkennt man zunächst aus der konstanten Gesamtablenkung $2\sigma + 2\tau = 2\omega$, dass zusammengehörige Spiegeltangenten den festen Winkel $\sphericalangle st = \sigma + \tau = \omega$ einschließen müssen und weiterhin, dass τ den Neigungswinkel von s und $-\sigma$ jenen von t gegen die x -Achse darstellt (Figur 2). Die Spiegelkurve k kann daher als gemeinsame Einhüllende eines geeignet bewegten starren Winkels erzeugt werden. Sucht man für diese Bewegung das Momentanzentrum M auf, das sich im Schnitt der beiden Berührungsnormalen von S und T ergibt, und bestimmt man anschliessend die Fortschrittrichtung des Winkelscheitels R , so findet man hierfür aus einfachen Winkelbeziehungen die Abszissenrichtung x . Nimmt man daher an, dass R die x -Achse durchläuft, und beschreibt man die Bewegung des Winkels st durch Angabe der Scheitelabszisse $X(\tau)$ in Abhängigkeit vom Winkelparameter τ , so hat man nur zu fordern, dass zu $\tau - \omega$ jeweils derselbe Wert gehört: $X(\tau)$ muss daher eine periodische analytische Funktion mit der Periode ω sein, was auch hinreicht. Für die gesuchte Spiegelkurve k erhält man auf diese Weise als Hüllbahn der Tangente s ($x \sin \tau - y \cos \tau = X \sin \tau$) die Parameterdarstellung $x = X(\tau) + X'(\tau) \sin \tau \cos \tau$, $y = X'(\tau) \sin^2 \tau$.

Einfache und interessante Spiegelkurven gehören beispielsweise zur Annahme $X = -\text{ctg } m \tau$, wobei $m\omega = \pi$. Figur 2 illustriert den Fall $m = 4$ ($\omega = \pi/4$); die betreffende Spiegelkurve 4. Klasse und 6. Ordnung belegt gleichzeitig die Existenz algebraischer Lösungen.

Eine Erweiterung der eingangs erhobenen Fragestellung auf n -malige Reflexion oder auf den Raum liegt auf der Hand. Als Beitrag hierzu sei auf jene kaum bekannte Eigenschaft des elliptischen Paraboloides hingewiesen, derzufolge parallel zur Achse ins Innere einfallende Lichtstrahlen nach dreimaliger Reflexion wieder achsenparallel austreten⁴⁾.

W. WUNDERLICH, Wien

⁴⁾ W. WUNDERLICH, *Spiegelung am elliptischen Paraboloid*, Mh. Math. 52, 13–37 (1948).

Aufgaben

Aufgabe 339. Démontrer que pour tout entier $n > 1$ on a les inégalités

$$2 \leq \frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} \leq \vartheta(n),$$

où $\varphi_k(n)$ désigne le nombre des suites de nombres naturels $\leq n$, tels que

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, n) = 1,$$

et

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k, \quad \vartheta(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Démontrer que pour les nombres n composés chacune des égalités est exclue.

A. MAKOWSKI, Varsovie

Solution: On a

$$\varphi_k(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k,$$

d'où, puisque $1 + \mu(d) \geq 0$,

$$\frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} = \sum_{d|n} \left(1 + \mu\left(\frac{n}{d}\right)\right) \left(\frac{d}{n}\right)^k = \sum_{d|n} (1 + \mu(d)) \frac{1}{d^k} \geq 1 + \mu(1) = 2.$$