Kleine Mitteilung

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Ungelöste Probleme

Nachtrag zu Nr. 14 (El. Math. *11*, 134 (1956)).

Herrn W. SIERPIŃSKI (Warschau) verdanken wir die folgenden Angaben:

Die von W. MNICH gestellte Frage, ob Summe und Produkt von drei rationalen Zahlen gleichzeitig 1 sein können, ist von J. W. S. CASSELS in seiner Arbeit: *On a diophantine equation* (Acta Arithmetica *6*, 47–52 (1960)) in negativem Sinn beantwortet worden. Leider ist der Casselsche Beweis nicht elementar und stützt sich auf Resultate verschiedener anderer Autoren. CASSELS hat bewiesen, dass das Problem von MNICH äquivalent ist mit der Frage, ob die diophantische Gleichung

$$y^2 = x^3 + (x + 4)^3$$

ausser $x = 0$, $y = 8$ weitere Lösungen in *rationalen* Zahlen besitzt. A. SCHINZEL konnte auf elementarem Wege zeigen, dass diese Gleichung auf jeden Fall keine weiteren Lösungen in *ganzen* Zahlen hat. E. TROST

Kleine Mitteilung

Simplexungleichungen

Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt P des n-dimensionalen Simplex A_i $(i = 1, \ldots, n + 1)$ schneiden die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume in B_i $(i = 1, \ldots, n + 1)$. Bezeichnen wir mit t_i $(i = 1, \ldots, n + 1)$ die Strecke $\overline{A_i B_i}$, mit d_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ die Strecke $\overline{PB_i}$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{d_i}{t_i} = 1 . \tag{1}$$

Beweis: Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich der entsprechenden Simplexspitzen, so gilt

$$\frac{d_i}{t_i} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n+1} x_i} ,$$

woraus (1) unmittelbar folgt.

Bezeichnen wir weiterhin mit r_i $(i = 1, \ldots, n + 1)$ den Abstand des dem A_i Simplexspitze gegenüberliegenden Grenzraumes von P, mit h_i $(i = 1, \ldots, n + 1)$ die zu A_i angehörigen Simplexhöhen, so ist einfach einzusehen, dass

$$\frac{r_i}{h_i} = \frac{d_i}{t_i} ,$$

woraus mit Rücksicht auf (1)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{r_i}{h_i} = 1 \tag{2}$$

unmittelbar folgt.

Fällt P mit dem Inhyperkugelmittelpunkt des Simplex zusammen, so wird

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{n+1} = \varrho ,$$

wo ϱ den Inhyperkugelradius bezeichnet. Für diesen Fall folgt aus (2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{\varrho} , \qquad \text{woraus} \quad \frac{n + 1}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h_i}} = (n + 1)\,\varrho .$$

Die linke Seite ist aber gleich dem harmonischen Mittel der Simplexhöhen $H(h_i)$, also

$$(n + 1) \cdot \varrho = H(h_i) . \tag{3}$$

Satz 1. *Das harmonische Mittel der Höhen eines n-dimensionalen Simplex ist gleich dem $(n+1)$-fachen Wert des Inhyperkugelradius.*

Mit Rücksicht auf die wohlbekannten Ungleichungen unter den harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mitteln folgt aus (3):

$$(n+1) \cdot \varrho = H(h_i) \leqq G(h_i) \leqq A(h_i) \leqq Q(h_i) . \tag{3*}$$

Für $n = 2$ ist (3*) eine weitere Verfeinerung der unteren Grenze der Dreiecksungleichung von LEUENBERGER [1] und ihre Verfeinerung von BERKES [2]. Für $n = 3$ gibt (3*) auch eine Verfeinerung für die untere Grenze der Ungleichung der Aufgabe Nr. 372 [3].

Wir bezeichnen mit S den Schwerpunkt, mit O den Umhyperkugelmittelpunkt, mit r deren Radius, mit m_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ die Länge der Ecktransversale durch S. Verwenden wir den auf den n-dimensionalen Raum ausgedehnten Satz von LEIBNIZ auf den Punkt O, so ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{OA_i^2} = (n+1)\, \overline{OS^2} + \sum_{i=1}^{n+1} \overline{SA_i^2}$$

woraus mit der Bezeichnung $s_i = \overline{SA_i}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ folgt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} s_i^2 = (n+1)\,(r^2 - \overline{OS^2}) . \tag{4}$$

Aus der Schwerpunktdefinition folgt:

$$\frac{s_i}{m_i} = \frac{n}{n+1} , \qquad \text{woraus } s_i^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot m_i^2 . \tag{5}$$

Setzt man diesen Wert in (4) ein, so folgt nach einfacher Rechnung:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2}{n+1} \right)^{1/2} = \frac{n+1}{n} \cdot (r^2 - \overline{OS^2})^{1/2} .$$

Die linke Seite ist aber gleich dem quadratischen Mittel der Schwerlinien $Q(m_i)$, woraus

$$Q(m_i) \leqq \frac{n+1}{n} \cdot r . \tag{6}$$

Satz 2. *Das quadratische Mittel der Schwerlinien des n-dimensionalen Simplex ist nicht grösser als der $(n+1)/n$-fache Wert des Umhyperkugelradius.*

Gleichheit tritt nur dann ein, wenn der Schwerpunkt mit dem Umhyperkugelmittelpunkt zusammenfällt. Das Gleichheitszeichen gilt also für reguläre Simplexe in jeder Dimension und für Simplexe, die, ohne regulär zu werden, hypervolumengleiche $(n-1)$-dimensionale Grenzsimplexe haben (simplex isoscèle), welche nur in den Dimensionen der Form $n = 4k + 3$ $(k = 0, 1, \ldots)$ vorkommen können.

Mit Rücksicht auf die wohlbekannten Ungleichungen unter den verschiedenen Mitteln folgt aus (6):

$$H(m_i) \leqq G(m_i) \leqq A(m_i) \leqq Q(m_i) \leqq \frac{n+1}{n} \cdot r . \tag{6*}$$

Für $n = 2$ ist (6*) eine Verfeinerung des Lemmas 2 von LEUENBERGER [1]. Für $n = 3$ gibt (6*) eine Verfeinerung der oberen Grenze der Aufgabe Nr. 372 [3] (da $h_i \leqq m_i$ gilt) und vermeidet die Beschränkung der Aufgabe, dass der Mittelpunkt der Umkugel im Innern des Tetraeders liegt.

Verwenden wir den Satz von LEIBNIZ für die Simplexspitze A_k:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{A_k A_i^2} = (n+1)\, s_k^2 + \sum_{i=1}^{n+1} s_i^2 ,$$

woraus nach Summation folgt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\overline{A_k A_i^2} = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} s_k^2 + (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} s_i^2 .$$

Die linke Seite ist die doppelte Quadratsumme der Simplexkanten, also gilt für die Quadratsumme der Kanten:

$$\sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} a_i^2 = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} s_i^2 .$$

Mit Rücksicht auf (5) folgt hieraus nach einfacher Rechnung:

$$\sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} a_i^2 = n^2 \frac{\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2}{n+1} = n^2\,[Q(m_i)]^2 ,$$

und hieraus infolge (6)

$$\sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} a_i^2 \leqq (n+1)^2 \cdot r^2 . \tag{7}$$

Satz 3. *Die Quadratsumme der Kanten eines n-dimensionalen Simplex ist nicht grösser als das Quadrat des* $(n+1)$*-fachen Umhyperkugelradius.*

Das Gleichheitszeichen gilt wieder nur dann, wenn der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt der Umhyperkugel zusammenfällt, also bei den regulären Simplexen, und bei den Simplexen, deren $(n-1)$-dimensionale Grenzsimplexe gleiches Hypervolumen haben.

Infolge der bekannten Ungleichungen unter den verschiedenen Mitteln folgt aus (7):

$$H(a_i) \leqq G(a_i) \leqq A(a_i) \leqq Q(a_i) \leqq r\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} . \tag{7*}$$

Für $n = 2$ kommt schon das Resultat von (7) bei BERKES [2] verhüllt vor. Für reguläre Simplexe in beliebigen Dimensionen enthält (7) die Lösung der Aufgabe Nr. 360 [4]. Für reguläre Simplexe folgt aus (7*) auch die bekannte Relation zwischen Kantenlänge und Umhyperkugelradius [5]

$$a = r\sqrt{2(n+1)/n} .$$

Bezeichnen wir mit V das n-dimensionale Hypervolumen des n-dimensionalen Simplex, mit V_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ das $(n-1)$-dimensionale Hypervolumen des der Spitze A_i gegenüberliegenden Grenzsimplex, so gilt bekanntlich [6]:

$$V_i\, h_i = n \cdot V ; \tag{8}$$

ähnlicherweise gilt

$$\varrho \sum_{i=1}^{n+1} V_i = n\, V ,$$

woraus $(n+1)\,\varrho \cdot A(V_i) = nV$ und mit Rücksicht auf (3):

$$H(h_i) \cdot A(V_i) = n \cdot V . \tag{9}$$

Anderseits aus (8):

$$h_i = n\, V \cdot \frac{1}{V_i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n+1} h_i = n\, V \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{V_i} ,$$

weiterhin

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} h_i}{n+1} = \frac{n \cdot V}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{V_i} , \qquad A(h_i) = n \cdot V \cdot \frac{1}{H(V_i)} ,$$

$$A(h_i) \cdot H(V_i) = n \cdot V . \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt

Satz 4. *Das Produkt des arithmetischen Mittels der $(n-1)$-dimensionalen Hypervolumina der Grenzsimplexe und des harmonischen Mittels der Simplexhöhen ist gleich dem Produkt des arithmetischen Mittels der Simplexhöhen und des harmonischen Mittels der $(n-1)$-dimensionalen Hypervolumina der Grenzsimplexe und gleich dem n-fachen Hypervolumen des Simplex.*

Aus Satz 4 lassen sich weitere Beziehungen ableiten, zum Beispiel:

$$H(h_i) : A(h_i) = H(V_i) : A(V_i)\,, \tag{11}$$

oder mit Hilfe der infolge (8) trivialen Gleichung $G(V_i)\, G(h_i) = n\, V$:

$$H(h_i) : G(h_i) = G(V_i) : A(V_i)\,, \tag{12}$$

$$H(V_i) : G(V_i) = G(h_i) : A(h_i)\,. \tag{13}$$

J. SCHOPP (Budapest)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. LEUENBERGER, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. *13*, 121–126 (1958).
[2] J. BERKES, *Bemerkungen zur Arbeit von* F. LEUENBERGER *über «Einige Dreiecksungleichungen»*, El. Math. *14*, 62–63 (1959).
[3] Aufgabe Nr. 372. El. Math. *15*, 17 (1960).
[4] Aufgabe Nr. 360. El. Math. *14*, 89 (1959).
[5] COXETER, *Regular Polytopes* (London 1948), S. 158.
[6] COXETER, *Regular Polytopes* (London 1948), S. 123.

Bemerkung der Redaktion: Die Sätze 1 und 2 der vorstehenden Abhandlung sind in der Mitteilung von Herrn F. LEUENBERGER, El. Math. *15*, 81–82, enthalten. Da Herr Schopp sein Manuskript am 23. Juni 1960 einsandte und die Beweise unterschiedlich sind, haben wir sie hier publiziert.

Aufgaben

Aufgabe 367. Es sei O ein beliebiger Punkt im Innern eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Bedeutet R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ den Abstand $\overline{OA_i}$, r_i den Abstand der Seitenfläche

$$A_{i+1}\,A_{i+2}\,A_{i+3}$$

von O, so gelten die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{3 \cdot 2^n\, r_i + (4 - 2^n)\, R_i} \geqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2)\,.$$

Gleichheit gilt für $n = 0$ nur, falls O der Höhenschnittpunkt eines orthozentrischen Tetraeders ist, im Fall $n = 1, 2$ nur für den Mittelpunkt O eines regulären Tetraeders.

Man beweise diese Ungleichungen.

Ist O analog innerer Punkt eines Dreiecks $A_1A_2A_3$, R_i $(i = 1, 2, 3)$ der Abstand $\overline{OA_i}$, r_i der Abstand der Seite $A_{i+1}\,A_{i+2}$ von O, so gilt ein entsprechendes Ungleichungssystem. Wie heisst es[1]?

F. LEUENBERGER, Zuoz

Lösung: Diese Aussage über das Tetraeder sowie die entsprechende für das Dreieck ergeben sich als Sonderfälle des folgenden allgemeineren Satzes: $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ seien die Eckpunkte eines n-dimensionalen Simplex, X sei ein beliebiger innerer Punkt. Die Ecktransversale A_iX schneide das durch die Punkte $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n+1}$ aufgespannte $(n-1)$-dimensionale Simplex im Punkt Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Wird $\overline{A_iX} = R_i$, $\overline{XY_i} = s_i$ gesetzt und bedeutet r_i den Abstand des Punktes X vom Teilsimplex $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n+1}$, dann gilt

[1]) Vgl. dazu J. BERKES, *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung*, El. Math. *12*, 121–123 (1957).