Kleine Mitteilungen

Über ein Problem der Differenzenrechnung

Die Glieder der Reihe

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \cdots$$

sind, wie man sich leicht durch Ausrechnen überzeugt, dadurch ausgezeichnet, dass die Anfangsglieder $\Delta^n x_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) der Folgen der ersten Differenzen, der zweiten Differenzen, ... mit den Gliedern der Reihe übereinstimmen, so dass $\Delta^n x_0 = 1/(n+1)$. Es ist von Interesse, die allgemeine Frage zu stellen: Wie muss die Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ beschaffen sein, damit

$$\Delta^n x_0 = x_n\,? \tag{1}$$

Wenn wir uns das Schema der Folge und der aufeinander folgenden Differenzen hinschreiben

$$\begin{array}{ccccccc} x_0, & & x_1, & & x_2, & & x_3, \ \ldots \\ & \Delta x_0, & & \Delta x_1, & & \Delta x_2, & \ldots \\ & & \Delta^2 x_0, & & \Delta^2 x_1, & & \ldots \\ & & & \Delta^3 x_0, & & \ldots & \\ & & & & \ldots, & & \end{array}$$

wobei jede Differenz $\Delta^{n+1} x_k = \Delta^n x_{k+1} - \Delta^n x_k$ unter der Lücke der Glieder steht, deren Differenz sie ist, so soll also die Folge $(\Delta x_0, \Delta^2 x_0, \Delta^3 x_0, \ldots)$ mit der Folge $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ übereinstimmen.

Aus der Differenzenrechnung ist folgende Formel bekannt:

$$\Delta^n x_0 = x_0 - \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x_n\,. \tag{2}$$

Es soll demnach sein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{2n-1} x_0 - x_{2n-1} = x_0 - \binom{2n-1}{1} x_1 + \binom{2n-1}{2} x_2 - + \cdots + \binom{2n-1}{2n-2} x_{2n-2} - \\ - 2 x_{2n-1} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{2n} x_0 - x_{2n} = x_0 - \binom{2n}{1} x_1 + \binom{2n}{2} x_2 - + \cdots + \binom{2n}{2n-2} x_{2n-2} - \\ - \binom{2n}{2n-1} x_{2n-1} = 0\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) sind Beziehungen zwischen denselben Zahlen $x_0, x_1, \ldots x_{2n-1}$. Sie stehen aber nicht im Widerspruch zueinander. Vielmehr ist Gleichung (4) eine Folge der vorhergehenden Gleichungen $\Delta x_0 - x_1 = 0$, $\Delta^2 x_0 - x_2 = 0, \ldots, \Delta^{2n-1} x_0 - x_{2n-1} = 0$. Zum Nachweis dieser Behauptung beweisen wir zunächst den

Hilfssatz: *Für zwei positive ganze rationale Zahlen a und b, $a > b$, ist der Ausdruck*

$$\left.\begin{aligned} A = \binom{a}{b} - \binom{a}{b+1}\binom{b+1}{b} + \binom{a}{b+2}\binom{b+2}{b} - + \cdots + \\ + (-1)^{a-b-1}\binom{a}{a-1}\binom{a-1}{b} + (-1)^{a-b}\binom{a}{a}\binom{a}{b} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Beweis: Eine Umformung des allgemeinen Gliedes von A ergibt

$$\begin{aligned} \binom{a}{b+r}\binom{b+r}{b} &= \frac{a\,(a-1)\ldots(a-b-r+1)}{(b+r)!}\;\frac{(b+r)\,(b+r-1)\ldots(r+1)}{b!} \\ &= \frac{a\,(a-1)\ldots(a-b-r+1)}{b!\,r!} = \binom{a}{b}\binom{a-b}{r}, \end{aligned}$$

daher

$$A = \binom{a}{b}\binom{a-b}{0} - \binom{a}{b}\binom{a-b}{1} + \binom{a}{b}\binom{a-b}{2} - + \cdots + (-1)^{a-b}\binom{a}{b}\binom{a-b}{a-b}$$

$$= \binom{a}{b}(1-1)^{a-b} = 0\,.$$

Wir bringen nun den Beweis der obigen Behauptung und setzen

$$\Delta^{2n}x_0 - x_{2n} = x_0 - \binom{2n}{1}x_1 + \binom{2n}{2}x_2 - + \cdots - \binom{2n}{2n-1}x_{2n-1} = \varphi_{2n}(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1})\,.$$

Da nun $x_1 = \Delta x_0$, $x_2 = \Delta^2 x_0, \ldots, x_{2n-1} = \Delta^{2n-1} x_0$ sein soll, so ist

$$\varphi_{2n}(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1}) = x_0 - \binom{2n}{1}\Delta x_0 + \binom{2n}{2}\Delta^2 x_0 - + \cdots - \binom{2n}{2n-1}\Delta^{2n-1}x_0 =$$

$$= x_0 - \binom{2n}{1}(x_0 - x_1) + \binom{2n}{2}\left(x_0 - \binom{2}{1}x_1 + x_2\right) - \binom{2n}{3}\left(x_0 - \binom{3}{1}x_1 + \binom{3}{2}x_2 - x_3\right)$$

$$+ - \cdots - \binom{2n}{2n-1}\left(x_0 - \binom{2n-1}{1}x_1 + \binom{2n-1}{2}x_2 - + \cdots - x_{2n-1}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{2n-1} x_r \left\{\binom{2n}{r} - \binom{2n}{r+1}\binom{r+1}{r} + \binom{2n}{r+2}\binom{r+2}{r} - + \cdots (-1)^{r+1}\binom{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{r}\right\}$$

und nach (5)

$$\varphi_{2n}(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1}) = \sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^{r+1}\binom{2n}{r}x_r = -\sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^r\binom{2n}{r}x_r =$$

$$= -\varphi_{2n}(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1})\,,$$

daher

$$\varphi_{2n}(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1}) = 0\,,$$

das heisst

$$\Delta^{2n}x_0 = \varphi_{2n}(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1}) + x_{2n} = x_{2n}\,.$$

Dabei darf für x_{2n} jeder beliebige Wert angenommen werden. Obige Behauptung ist somit bewiesen. Zusammenfassend kommen wir zu folgendem

Satz: *Um Zahlenfolgen $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ mit der Bedingung $\Delta^n x_0 = x_n$ zu bilden, darf man die Zahlen mit geradem Index beliebig annehmen, während die mit ungeradem Index sich sukzessive aus den Gleichungen*

$$x_0 - \binom{2n-1}{1}x_1 + \binom{2n-1}{2}x_2 - + \cdots + \binom{2n-1}{2n-2}x_{2n-2} - 2x_{2n-1} = 0\,,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

oder

$$x_0 - \binom{2n}{1}x_1 + \binom{2n}{2}x_2 - + \cdots + \binom{2n}{2n-2}x_{2n-2} - \binom{2n}{2n-1}x_{2n-1} = 0\,,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

ergeben.

Als Anwendung der allgemeinen Betrachtung untersuchen wir die Folge, die durch die Bedingungen

$$x_0 = 1\,, \quad x_{2n} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gegeben ist. (3) und (4) gehen dadurch über in

$$1 - \binom{2n-1}{1}x_1 - \binom{2n-1}{3}x_3 - \cdots - \binom{2n-1}{2n-3}x_{2n-3} - 2x_{2n-1} = 0\,, \tag{6}$$

$$1 - \binom{2n}{1}x_1 - \binom{2n}{3}x_3 - \cdots - \binom{2n}{2n-1}x_{2n-1} = 0\,. \tag{7}$$

Um einen geschlossenen Ausdruck für x_{2n-1} zu erhalten, machen wir Gebrauch von den Potenzreihen der beiden hyperbolischen Funktionen

$$x \coth x = x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ und } \frac{x}{\sinh x} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}}.$$

Beide lassen sich, da sie gerade Funktionen sind, nach Potenzen von x^2 entwickeln, beginnend mit dem Glied 1. Man kann also setzen

$$x \coth x - \frac{x}{\sinh x} = x\left(\frac{a_1}{1!}x + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_5}{5!}x^5 + \cdots\right) = x\,\mathfrak{P}(x).$$

Daher

$$(e^x - e^{-x})\,\mathfrak{P}(x) = e^x + e^{-x} - 2,$$

$$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\mathfrak{P}(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Vergleichung der Koeffizienten von x^{2n} auf beiden Seiten liefert

$$\frac{a_1}{(2n-1)!\,1!} + \frac{a_3}{(2n-3)!\,3!} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{1!\,(2n-1)!} = \frac{1}{(2n)!},$$

oder

$$1 - \binom{2n}{1}a_1 - \binom{2n}{3}a_3 - \cdots - \binom{2n}{2n-1}a_{2n-1} = 0,$$

eine Rekursionsformel der a_{2n-1}, die mit (7) übereinstimmt, daher

$$x_{2n-1} = a_{2n-1}.$$

Die a_{2n-1} lassen sich leicht angeben, da die Potenzreihen von $x \coth x$ und $x/\sinh x$ bekannt sind, nämlich

$$x \coth x = 1 + \frac{2^2 B_1}{2!}x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!}x^4 + - \cdots (-1)^{n-1}\frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$$

$$-\pi < x < +\pi,$$

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{2(2^1 - 1)B_1}{2!}x^2 + \frac{2(2^3-1)B_2}{4!}x^4 -$$

$$- + \cdots (-1)^n \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad -\pi < x < +\pi,$$

folglich

$$\frac{1}{(2n-1)!}x_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)!}a_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}(2^{2n} + 2\cdot 2^{2n-1} - 2),$$

$$x_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{n}(2^{2n} - 1), \tag{8}$$

also

$$x_1 = \frac{B_1}{1}(2^2 - 1), \quad x_3 = -\frac{B_2}{2}(2^4 - 1), \quad x_5 = \frac{B_3}{3}(2^6 - 1), \ldots$$

($B_1, B_2, B_3, \ldots$ = Bernoullische Zahlen).

Wir erhalten somit folgenden

Satz: *Bestimmt man für die Folge*

$$1, \frac{B_1}{1}(2^2 - 1), \quad 0, -\frac{B_2}{2}(2^4 - 1), \quad 0, \frac{B_3}{3}(2^6 - 1), \quad 0, \ldots$$

die aufeinander folgenden Differenzenreihen, so stimmt die Folge der Anfangsglieder der Differenzenreihen mit der Zahlenfolge überein.

Wie unmittelbar einleuchtet, sind die Bernoullischen Zahlen die einzigen rationalen Zahlen, die man für $B_1, B_2, B_3, \ldots$ setzen kann, damit die Aussage des Satzes richtig ist. Man kann in ihr also geradezu eine Definition dieser Zahlen sehen. Eine weitere Eigenschaft ergibt sich aus (3). Diesen Gleichungen zufolge sind $2x_1, 2^2x_3, 2^3x_5, \ldots 2^n x_{2n-1}, \ldots$ ganze Zahlen. Damit ist in einfacher Weise bewiesen

Satz: *Der Ausdruck $2^n(2^{2n} - 1)B_n/n$ ist eine ganze Zahl.*

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Über den Zusammenhang zwischen zwei Abdeckungsproblemen von n-dimensionalen Hyperkugelbereichen

Seien R_n und R_n^* im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum eingebettete vollständig parallele n-dimensionale Räume, deren Abstand $d/2$ beträgt. Sei weiterhin D ein n-dimensionaler geschlossener Hypersphäroformbereich[1]) von konstantem Durchmesser d.

Sei weiterhin M die vollständige Menge derjenigen n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereiche K_α, die D eingeschrieben sind. Sind K_α bzw. K_β zwei beliebige Hyperkugelbereiche der Menge M, mit den Mittelpunkten O_α bzw. O_β und mit den Radien r_α bzw. r_β, so gilt offenbar

$$0 \leqq r_\alpha\,, \quad r_\beta \leqq \varrho < \frac{d}{2}\,, \tag{1}$$

(wo ϱ den Inhyperkugelradius von D bezeichnet) und

$$\overline{O_\alpha O_\beta} + r_\alpha + r_\beta \leqq d\,. \tag{2}$$

Man betrachte die Hyperkugelbereiche der Menge M als zyklographische Abbildung einer Punktmenge $\overline{M}$ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, die im $(n+1)$-dimensionalen Raumstreifen zwischen R_n und R_n^* liegt. Der beliebige Hyperkugelbereich K_α der Menge M ist also als zyklographisches Bild desjenigen Punktes A der Punktmenge $\overline{M}$ zu betrachten, der auf dem Lot durch O_α auf R_n und im $(n+1)$-dimensionalen Raumstreifen so liegt, dass $\overline{O_\alpha A} = r_\alpha$ ist. Bildet man zyklographisch die Punktmenge $\overline{M}$ auf R_n^* ab, so entsteht im R_n^* eine Menge M^* von Hyperkugelbereichen K_α^*. Waren K_α und K_β zwei beliebige Hyperkugelbereiche der Menge M, so entsprechen ihnen zwei Hyperkugelbereiche K_α^* und K_β^* der Menge M^*, ihre Mittelpunkte O_α^* bzw. O_β^* sind die Projektionen von O_α bzw. O_β auf R_n^*, woraus

$$\overline{O_\alpha O_\beta} = \overline{O_\alpha^* O_\beta^*}\,. \tag{3}$$

Da der Abstand zwischen R_n und R_n^* $d/2$ beträgt, gilt für die Radien r_α^* bzw. r_β^* der Hyperkugelbereiche K_α^* und K_β^*

$$r_\alpha + r_\alpha^* = \frac{d}{2}\,, \qquad r_\beta + r_\beta^* = \frac{d}{2}\,. \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf (2) und (3) folgt hieraus

$$\overline{O_\alpha^* O_\beta^*} \leqq r_\alpha^* + r_\beta^*\,. \tag{5}$$

Aus (1) und (4) folgt weiterhin

$$\left(\frac{d}{2} - \varrho\right) \leqq r_\alpha^*\,, \quad r_\beta^* \leqq \frac{d}{2}\,, \tag{6}$$

(5) und (6) zeigen, dass die Hyperkugelbereiche K_α^* der Menge M^* paarweise einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen, und ihre Radien beschränkt sind. Es ist leicht einzusehen, dass die Menge M^* auch vollständig ist, und dass sie nur einen einzigen Hyperkugelbereich mit dem minimalen Radius $d/2 - \varrho$ besitzt. Es lässt sich weiterhin auch leicht zeigen, dass laut obigem Verfahren die Hyperkugelbereiche der vollständigen Menge M^* sich genau auf die Hyperkugelbereiche der vollständigen Menge M abbilden lassen.

Nun entsteht eine eindeutige, umkehrbare Abbildung zwischen den geschlossenen Hyperkugelbereichen der vollständigen Menge M, die in einem Hypersphäroformbereich eingeschrieben sind, und den geschlossenen Hyperkugelbereichen mit beschränkten Radien der vollständigen Menge M^*, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen.

Die Hyperkugelbereiche der Menge M sind offenbar mit einem einzigen n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereich vom Durchmesser d nicht abzudecken. Sei nun H_i eine Teilmenge von M, deren n-dimensionale Hyperkugelbereiche sich mit einem einzigen n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereich K_i mit dem Mittelpunkt O_i und vom

[1]) Ein n-dimensionaler Raumbereich, dessen beliebige $(n-1)$-dimensionale parallele Stützräume den konstanten Abstand d besitzen.

Durchmesser d abdecken lassen. Falls ein beliebiger Hyperkugelbereich K_α zur H_i gehört, so gilt

$$\overline{O_i O_\alpha} + r_\alpha \leqq \frac{d}{2}. \tag{7}$$

Die zyklographische Abbildung von K_i auf R_n^* gibt einen Punkt O_i^*, (einen Hyperkugelbereich mit Nullradius), die Projektion von O_i auf R_n^*. Dem Hyperkugelbereich K_α der Menge M_i entspricht im R_n^* der Hyperkugelbereich K_α^* und aus (3), (4) und (7) folgt $\overline{O_i^* O_\alpha^*} \leqq r_\alpha^*$, das heisst O_i^* ist ein Punkt des geschlossenen Hyperkugelbereiches K_α^* der Menge M^*. Den Hyperkugelbereichen der Teilmenge H_i entspricht im R_n^* eine Teilmenge H_i^* der Hyperkugelbereiche der Menge M^*, die einen nichtleeren Durchschnitt, den Punkt O_i^* besitzen. Es ist auch leicht einzusehen, dass einer – im obigen Sinne definierten – Teilmenge H_i^* von M^*, die Teilmenge H_i von M entspricht. Hieraus folgt

Satz I. *Gibt es eine natürliche Zahl m so, dass die vollständige Menge der in eine n-dimensionale geschlossene Hypersphäroform vom Durchmesser d eingeschriebenen geschlossenen Hyperkugelbereichen mit m n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereichen vom Durchmesser d abdeckbar ist, so lässt sich die vollständige Menge – derjenigen n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereiche mit beschränkten Durchmessern, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen – genau in m solche Teilmengen zerlegen, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Hyperkugelbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.*

Laut obigem Gedankengang ist dieser Satz umkehrbar.

Sei nun h die Menge der Punkte der geschlossenen n-dimensionalen Hypersphäroform von konstanter Breite d im R_n. Ihre zyklographische Abbildung in R_n^* ergibt die vollständige Menge h^* derjenigen n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereiche vom Durchmesser d, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Hieraus folgt

Satz II. *Gibt es eine natürliche Zahl m' so, dass sich die Menge der Punkte einer n-dimensionalen geschlossenen Hypersphäroform vom Durchmesser d mit m' n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereichen vom Durchmesser d abdecken lässt, so lässt sich die vollständige Menge – derjenigen n-dimensionalen geschlossenen Hyperkugelbereiche von beschränktem gleichem Durchmesser, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen – genau in m' Teilmengen so zerlegen, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Hyperkugelbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.*

Das Problem der Menge M^* ist für $n = 2$ bekannt. Gallai hat vermutet und Ungár und Szekeres haben erstmals bewiesen [1, 2], dass es eine natürliche Zahl m so gibt, dass die Menge derjenigen geschlossenen ebenen Kreisbereiche, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt haben, sich in m solche Teilmengen zerlegen lässt, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen. (Dieser Satz ist auch für Kreisbereiche mit unbeschränkten Radien gültig. Aus Satz I folgt unmittelbar, dass die Menge der obigen geschlossenen Kreisbereiche mit beschränkten Radien sich zu einer vollständigen Menge ergänzen lässt.) Aus diesem bekannten Satz und aus Satz I folgt

Satz Ia. *Die vollständige Menge der in einer geschlossenen Orbiforme vom Durchmesser d eingeschriebenen geschlossenen Kreisbereiche lässt sich mit m geschlossenen Kreisbereichen vom Durchmesser d abdecken, wo die natürliche Zahl m mit der Stichzahl des Gallaischen Problems übereinstimmt.*

Die Anwendung des Satzes II für die Ebene zeigt, dass die Punktmenge einer geschlossenen Orbiforme vom Durchmesser d sich mit genau so vielen geschlossenen Kreisbereichen vom Durchmesser d abdecken lässt, wie sich die Menge von geschlossenen Kreisbereichen vom gleichen beschränkten Durchmesser in solche Teilmengen zerlegen lässt, dass die zu jeder Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen. Beide Probleme sind bekannt und wurden voneinander unabhängig gelöst. Es ist bekannt, dass eine Orbiforme vom Durchmesser d sich mit 3 Kreisen sogar vom Durchmesser $d\sqrt{3}/2$ abdecken lässt [3, 4], und Hadwiger [5] bewies, dass die Menge derjenigen kongruenten ebenen Kreisbereiche, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt haben, sich in 3 solche Teilmengen zerlegen lässt, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen.

J. SCHOPP, Budapest

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum* (Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953), S. 97.
[2] H. HADWIGER, *Ungelöste Probleme*, Nr. 19, El. Math. *12*, 109 (1957).
[3] D. GALE, *On Inscribing n-Dimensional Sets in a Regular n-Simplex*, Proc. Amer. Math. Soc. *4*, 222–225 (1953).
[4] H. LENZ, *Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers*, Arch. Math. 7, 34–40 (1956).
[5] H. HADWIGER – H. DEBRUNNER, *Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene*, Enseignement mathématique (1955), S. 75.

Zu einem Konvergenzsatz der elementaren Erneuerungstheorie

Ein Anfangsbestand mit E_0 Elementen sei einer starren Ausscheideordnung unterworfen, derart, dass am Ende des ersten Jahres $w_1 E_0$ Elemente abgehen, am Ende des zweiten Jahres $w_2 E_0$, ... am Ende des k-ten Jahres $w_k E_0$. Der Bestand sei dann ausgestorben, also

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 1; \tag{1}$$

dabei setzen wir alle w_i, $i = 1, 2, \ldots k$, grösser als Null voraus, das heisst, kein Jahr soll ohne Abgänge sein. Jedes abgehende Element werde jeweils sofort durch genau ein zugehendes ersetzt, so dass am Ende des ersten Jahres E_1 Elemente, am Ende des zweiten E_2, ... am Ende des t-ten Jahres E_t Elemente hinzutreten. Sie mögen demselben Ausscheidegesetz wie der Anfangsbestand gehorchen. Dann gelten für die Erneuerungszahlen die Beziehungen

$$\begin{aligned} E_1 &= w_1 E_0 , \\ E_2 &= w_2 E_0 + w_1 E_1 , \\ E_3 &= w_3 E_0 + w_2 E_1 + w_1 E_2 , \\ E_k &= w_k E_0 + w_{k-1} E_1 + \cdots + w_1 E_{k-1} , \end{aligned}$$

und allgemein hat man für ganze $t \geqslant k$

$$E_t = w_1 E_{t-1} + w_2 E_{t-2} + \cdots + w_k E_{t-k} . \tag{2}$$

Gewisse Konvergenzeigenschaften der Erneuerungszahlen E_t lassen sich in sehr einfacher Weise unter Ausnützung rein algebraischer Beziehungen aus (1) und (2) herleiten. Als fruchtbar erweist sich namentlich die Einführung des Maximums und des Minimums von k aufeinander folgenden Erneuerungszahlen[1]).

Wir bezeichnen für ganze $t \geqslant k$

mit M_t das Maximum von $E_t, \ E_{t+1}, \ldots E_{t+k-1}$,
mit m_t das Minimum von $E_t, \ E_{t+1}, \ldots E_{t+k-1}$.

M_t und m_t gestatten auf mehreren Wegen den Beweis dafür, dass die Folge der Erneuerungszahlen mit $t \to \infty$ gegen eine Zahl E konvergiert. Einer dieser Beweise[2]) macht zunächst eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit, indem er zur Ungleichung führt

$$M_{t+k} - m_{t+k} \leqslant \frac{M_t - m_t}{1 + w} , \tag{3}$$

worin $w = \operatorname{Min}(w_1, w_2, \ldots w_k)$.

[1]) Siehe z. B. W. SAXER, *Versicherungsmathematik I*, Springer Verlag 1955, und die dort angegebenen Literaturhinweise.
[2]) Siehe das erwähnte Buch, S. 200.

Man kann die noch etwas bessere Beziehung

$$M_{t+k} - m_{t+k} \leqslant (1 - w)\,(M_t - m_t) \tag{4}$$

gewinnen, was im nachfolgenden gezeigt sei.

Vorerst stellt man auf Grund von (2) leicht fest, dass für $t \geqslant k$ $M_{t+1} \leqslant M_t$ und $m_{t+1} \geqslant m_t$ ist. Da ausserdem $M_t \geqslant m_t$ gilt, ergibt sich die Existenz eines Grenzwertes von M_t und von m_t für $t \to \infty$ aus bekannten Sätzen über monotone beschränkte Folgen. Zu zeigen wäre noch die Identität beider Grenzwerte.

Der Fall, dass k Erneuerungszahlen hintereinander unter sich gleich sind – welcher gemäss (1) und (2) von da an sofort zu konstanten Erneuerungszahlen führt – genügt bereits der Beziehung (4).

$E_t, E_{t+1}, \ldots E_{t+k-1}$ seien nun nicht alle gleich gross[3]).

Wir untersuchen den Ausdruck

$$M_t - E_{t+k} = \sum_{i=1}^{k} w_i\,(M_t - E_{t+k-i})$$

etwas näher.

Mindestens eine der Erneuerungszahlen rechts ist gleich gross wie M_t, so dass deren Differenz verschwindet. Ersetzen wir das zugehörige w_i noch durch das Minimum der w_i, so kommen wir schliesslich zu

$$M_t - E_{t+k} \leqslant (1 - w)\,(M_t - m_t)\,. \tag{5}$$

Diese Ungleichung denken wir uns *mutatis mutandis* angesetzt für $E_{t+k}, E_{t+k+1}, \ldots, E_{t+2k-1}$, also

$$\left.\begin{aligned} M_t - E_{t+k} &\leqslant (1 - w)\,(M_t - m_t)\,,\\ M_{t+1} - E_{t+k+1} &\leqslant (1 - w)\,(M_{t+1} - m_{t+1})\,,\\ &\vdots\\ M_{t+k-1} - E_{t+2k-1} &\leqslant (1 - w)\,(M_{t+k-1} - m_{t+k-1})\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir vergrössern rechts und verkleinern links dergestalt, dass wir die meisten Indizes vereinheitlichen können. Zu diesem Zweck ersetzen wir rechts die Differenzen $(M_t - m_t)$, $(M_{t+1} - m_{t+1}), \ldots$ durch eine darunter, welche von keiner andern übertroffen wird, nämlich $(M_t - m_t)$. Linker Hand ersetzen wir $M_t, M_{t+1}, \ldots M_{t+k-1}$ überall durch das höchstens gleich grosse M_{t+k}. So gewinnen wir Ungleichungen, in denen bloss die Erneuerungszahlen links verschiedene Indizes $t + k$, $t + k + 1, \ldots t + 2k - 1$ tragen. Jede dieser modifizierten Ungleichungen ist gültig; daher gilt – mindestens – eine davon auch für die kleinste unter den Zahlen $E_{t+k}, E_{t+k+1}, \ldots E_{t+2k-1}$, das heisst für m_{t+k}. Folglich gelangen wir zur Ungleichung (4), welche sich wie folgt als Satz aussprechen lässt:

Die Schwankungsbreite von k unmittelbar aufeinanderfolgenden Erneuerungszahlen, welche der Beziehung (1) unterliegen, verringert sich im Verhältnis zur Schwankungsbreite der vorangehenden k Erneuerungszahlen mindestens so stark, als ob die kleinste Ausscheidewahrscheinlichkeit weggefallen wäre.

Die Schwankungsbreite $(M_t - m_t)$ lässt sich mit $t \to \infty$ beliebig klein machen; denn es ist für eine natürliche Zahl s

$$M_{t+sk} - m_{t+sk} \leqslant (1 - w)^s\,(M_t - m_t)\,; \tag{7}$$

[3]) Die Erneuerungszahlen und die daraus hervorgehenden Teilbestände sind selten ganzzahlig. Die darin liegende Problematik wird gewöhnlich übergangen. Wir weichen ihr kurzerhand aus, indem wir die einzelnen Elemente als beliebig unterteilbar voraussetzen. Die Problematik ist dadurch allerdings nicht eigentlich gelöst.

die rechte Seite geht aber bei festem t und wachsendem s gegen Null. Der Grenzwert E von E_t ergibt sich bekanntlich zu

$$E = \frac{E_0}{w_1 + 2\,w_2 + \cdots + k\,w_k} \,. \tag{8}$$

Auf möglichst kurzem Weg kommen wir so zu dieser Formel: Am Ende des t-ten Jahres ($t \geqslant k$), gerade nach dem Abtausch der Abgänge und Zugänge, hat der Gesamtbestand den Umfang E_0. Dabei sind übrig:

$$\begin{array}{ll}
\text{von } E_t & \text{noch alle Elemente ,} \\
\text{von } E_{t-1} & \text{noch alle bis auf } w_1\,E_{t-1} \text{ ,} \\
\text{von } E_{t-2} & \text{noch alle ausgenommen } (w_1 + w_2)\,E_{t-2} \text{ ,} \\
\vdots & \\
\text{von } E_{t-k+1} & \text{noch } w_k\,E_{t-k+1} \text{ ,} \\
\text{von } E_{t-k} & \text{und früheren keine mehr.}
\end{array}$$

Daher ist

$$E_0 = E_t\,(w_1 + w_2 + \cdots + w_k) + E_{t-1}\,(w_2 + \cdots + w_k) + \cdots + E_{t-k+1}\,w_k$$

oder

$$E_0 = w_1\,E_t + w_2\,(E_t + E_{t-1}) + \cdots + w_k\,(E_t + \cdots + E_{t-k+1}) \,. \tag{9}$$

Durch den Grenzübergang $E_t \to E$ für $t \to \infty$ erhält man (8).

Wird mindestens ein w_i zu Null und somit auch w, so verliert die Ungleichung (5) ihre konvergenzerzeugende Wirkung. Da die Ausscheideordnung $(w_1, w_2, \ldots w_k)$ in jedem Fall mit dem letzten von Null verschiedenen w_i abbricht, gibt es verschwindende w_i nur für Indizes $i < k$.

Die Einschränkung, dass durchwegs die $w_i > 0$ sein sollen, ist für die Konvergenz der Erneuerungszahlen in der Tat wesentlich, wie durch das Beispiel $k = 2$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ belegt wird. Die Erneuerungszahlen sind hier abwechselnd 0 und E_0, eine Konvergenz findet nicht statt.

Die getroffenen Annahmen lassen sich in anderer Hinsicht etwas lockern. Bisher war unterstellt, der Anfangsbestand E_0 sei der nämlichen Ausscheideordnung ausgesetzt wie die später eintretenden Elemente. Diese Bedingung ist nicht notwendig; vielmehr darf der Anfangsbestand von einer anderen (starren) Ausscheideordnung $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beherrscht sein, mit

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \,. \tag{10}$$

Da für $t > n$ der Anfangsbestand ausgestorben ist, herrscht dann allein die Ausscheideordnung, welche für die Erneuerungszahlen massgebend ist; nur sie geht in (4), (7) und (8) ein. Überhaupt gelten die Überlegungen zur Ungleichung (4) und zum Grenzwert E allgemein, sofern sich nur von einem t an die Ausscheideordnung gemäss (1) völlig durchgesetzt hat.

Das Ausscheiden von Elementen und der Neueintritt derjenigen, welche sie zu ersetzen haben, genau am jeweiligen Jahresende, bedeutet, dass wir es mit sehr speziellen Annahmen zu tun haben. Weniger einschneidend wäre zum Beispiel die Bedingung, dass die Elemente auch während des Jahres austreten und dass jeweils sofort ihr Ersatz vonstatten geht. Unter diesen Umständen bleibt der Umfang der Gesamtheit auch während des Jahres fest, sofern man noch die Voraussetzung hinzufügt, dass ein Wiederaustreten der während des Jahres hinzugekommenen Elemente erst im Folgejahr gemäss Ausscheidegesetz beginnen kann. Die bisherigen Aussagen lassen sich dann ohne weiteres übertragen. Schwächt man darüber hinaus die Voraussetzungen noch insofern ab, dass nun der Ersatz ausgeschiedener Mitglieder irgendwann einmal im gleichen Jahr erfolgen darf, so verringert u.U. der Bestand während des Jahres seinen Umfang, geht dann jedoch am Jahresende stets wieder auf die ursprüngliche Anzahl E_0 zurück. Die bisher gewonnenen Beziehungen bleiben voll erhalten, bis auf (8), welche nur für diskrete Zeitpunkte (nämlich für das Jahresende) eine Übereinstimmung von E_0 und vorhandenem Bestand auszunutzen erlaubt.

B. Romer, Basel