**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 16 (1961)
**Heft:** 5

**Rubrik:** Aufgaben

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

In Figur 2 (von innen her zu lesen) rücken 2 und 3 usw. je gegen eine Ausbuchtung. Weiter erhält man Dornspitzen nach aussen, dann Schleifen, die zur Absonderung von Ovalen nach aussen Anlass bieten. Das Ergebnis ist dieselbe wellige Grundform wie zu Beginn, aber mit Ovalen im Äussern.

In Figur 3 betrachte man, von 1 ausgehend, je sechs aufeinanderfolgende Wendestellen. 1 und 2 rücken gegen eine Einbuchtung zusammen, die Wendestelle 3 bleibt, 4 und 5 rücken gegen eine Ausbuchtung, die nächste Wendestelle 6 bleibt als solche erhalten; usw. Es ergeben sich «fortschreitende Lemniskaten». Die Ablösung der Ovale erfolgt abwechselnd nach innen und nach aussen.

Solche zusammenfassende Bilder vermitteln für wichtige Umformungen eine Vertrautheit, die sich auf anderen Wegen kaum so angenehm gewinnen lässt. Zu den verschiedenen Massnahmen, die für eine durchgreifende Neugestaltung des mathematischen Unterrichts zu treffen sind, gehört auch das Einbeziehen einer lebendigen Kurvengeometrie.

L. Locher-Ernst

# Aufgaben

**Aufgabe 383.** Die Verbindungsgerade eines festen Punktes $A$ mit der Mitte $M$ eines Kreises $k$ schneide $k$ in den Punkten $P$ und $Q$. Durchläuft $k$ ein hyperbolisches Kreisbüschel, so erfüllen bekanntlich die Punkte $P, Q$ im allgemeinen eine monozirkulare Kubik vom Geschlecht Null mit drei im endlichen liegenden reellen Scheiteln. Wie kann man für jene dieser «Fokalen», die eine Symmetrieachse besitzen, die Scheitelkrümmungskreise einfach konstruieren, und wo muss der Aufpunkt $A$, der zugleich der singuläre Brennpunkt der Kubik ist, gewählt werden, damit die drei Scheitelkrümmungskreise kongruent werden?

R. Bereis, Dresden

*Lösung des Aufgabenstellers:* Kurven geforderter Art mit Symmetrieachsen erhält man naturgemäss, wenn man den Aufpunkt $A$ (Figur) in der Symmetrieachse des gegebenen hyperbolischen Kreisbüschels wählt, die die beiden konjugiert komplexen Grundpunkte trägt. Die so erzeugten Fokalen sind anallagmatisch – also zu sich selbst invers – mit dem Inversionszentrum $A$. Der Inversionskreis gehört dem ergänzenden elliptischen Kreisbüschel an und geht durch die Nullkreise $N_1$, $N_2$. Jede dieser $c_3$ kann somit auch als Hüllkurve einer einparametrigen Schar von doppeltberührenden Kreisen $k_d$ aufgefasst werden, die den erwähnten Inversionskreis als gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen. Die Mitten der Kreise $k_d$ erfüllen die sogenannte Deferente $\Delta$ der betrachteten $c_3$, die von den Streckensymmetralen entsprechender Punktepaare $P$, $Q$ umhüllt wird. $\Delta$ ist demnach eine Parabel mit dem Brennpunkt $A$ und der Mittengeraden des Kreisbüschels als Scheiteltangente. Die Leitgerade $l$ der Parabel $\Delta$, die auch als Kissoide der $c_3$ mit dem Aufpunkt $A$ erhalten werden kann, ist ferner Asymptote der $c_3$.

Die Punkte $P$, $Q$ rücken für die beiden Nullkreise $N_1$, $N_2$ des Kreisbüschels zusammen. Die zugehörigen Krümmungskreise müssen daher die $c_3$ vierpunktig berühren, das heisst, die Nullkreise $N_1$, $N_2$ des Kreisbüschels sind Scheitel der $c_3$. Die zugehörigen Krümmungsmitten $K_1$, $K_2$ sind als Punkte der Parabel $\Delta$ leicht zu konstruieren. So liegt zum Beispiel $K_2$ auf der Normalen zu $[AN_2]$ in $N_2$ (= Tangente der Parabel $\Delta$). Hat $A$ von der Büschelsymmetralen den Abstand $a$, und beträgt die Entfernung der beiden Nullkreise $N_1 N_2 = 2b$, so erhält man für den Krümmungsradius in $N_1$ bzw. in $N_2$

$$\varrho_{1,2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2},$$

während der Krümmungskreis im Symmetriescheitel $A$ invers zur Asymptote $l$ liegt und daher den Radius

$$\varrho_A = \frac{1}{4a}(a^2 + b^2)$$

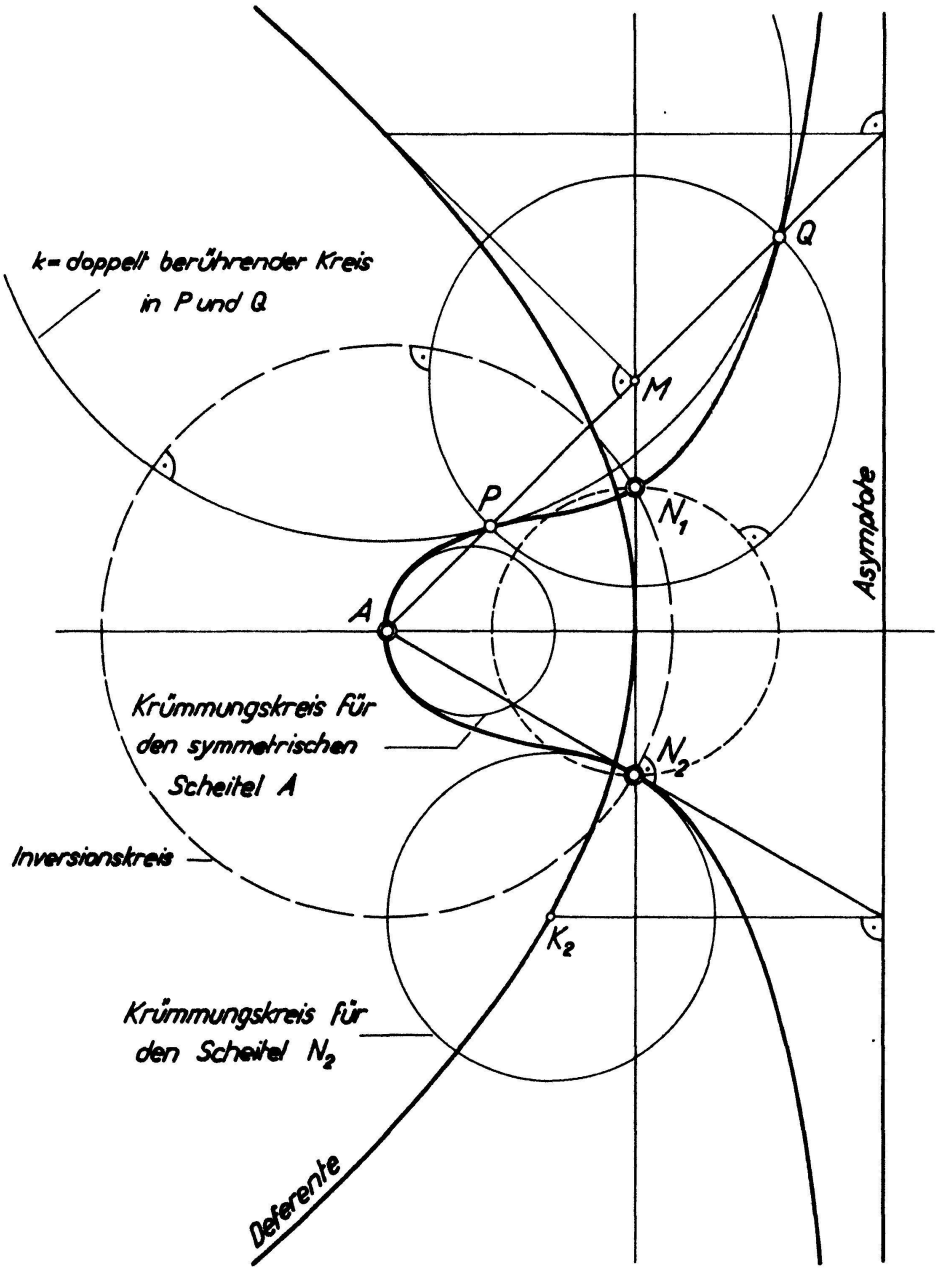
besitzt.

Die Krümmungsradien $\varrho_1$, $\varrho_A$ sind demnach dann und nur dann einander gleich, wenn

$$a = b\sqrt{15}$$

ist, also wenn gilt

$$AN_1 = AN_2 = 2\,N_1 N_2\,.$$




**Aufgabe 384.** $P_1, P_2, \ldots, P_n$ seien $n$ Punkte der Kurve

$$y = x^{n+1} + a_1 x^n + \cdots + a_n x + a_{n+1}\,, \quad (n \geqq 2)\,,$$

in denen die Tangenten den gleichen Richtungsfaktor $k$ haben. Es soll gezeigt werden, dass die zu verschiedenen Werten von $k$ gehörenden Punktaggregate $P_1, P_2, \ldots, P_n$ denselben Schwerpunkt besitzen. W. JÄNICHEN, Berlin

*Lösung:* Es sei $\sigma_v = \sum_{i=1}^{n} x_i^v$ die $v$-te Potenzsumme der $n$ Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gleichung $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$. Dabei ist $(n+1)\,b_v = a_v\,(n - v + 1)$ mit $v = 1, \ldots, n-1$ und $(n+1)\,b_n = a_n - k$. Es bezeichnen $x_s, y_s$ die Koordinaten des

Schwerpunktes $S$. Dann ist $x_s = \sigma_1 = -b_1$, das heisst $x_s$ ist unabhängig von $k$. Weiter ist

$$(n+1)\, y_s = \sigma_{n+1} + a_1 \sigma_n + a_2 \sigma_{n-1} + \cdots + a_n \sigma_1 + n\, a_{n+1}\,. \tag{1}$$

Für die Potenzsummen gelten bekanntlich die Relationen

$$\sigma\, \varrho + b_1 \sigma_{\varrho-1} + \ldots + b_{\varrho-1} \sigma_1 + \varrho\, b_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

$$\sigma_{n+1} + b_1 \sigma_n + \cdots + b_{n-1} \sigma_2 + b_n \sigma_1 = 0\,. \tag{3}$$

Man sieht, dass nur $\sigma_n$ und $\sigma_{n+1}$ von $k$ abhängen. Aus (2) und (3) folgt

$$\sigma_{n+1} + a_1 \sigma_n = -b_1 \sigma_n - b_n \sigma_1 + a_1 \sigma_n - \cdots$$
$$= (n+1)\, b_1 b_n - n\, a_1 b_n - \cdots = n\, a_1 b_n - n\, a_1 b_n - \cdots\,.$$

Dabei sind alle von $k$ unabhängigen Summanden nicht hingeschrieben worden. Aus (1) folgt jetzt, dass auch $y_s$ von $k$ unabhängig ist. Es ist demnach der Schwerpunkt des Punktaggregats $P_1, P_2, \ldots, P_n$ unabhängig vom Richtungsfaktor $k$.

E. Herrmann, Porz am Rhein

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bern), B. Bollobás (Budapest), P. Buchner (Basel), G. Geise (Dresden), L. Kieffer (Luxemburg), H. Meili (Winterthur), O. Reutter (Ochsenhausen), Ch. Vuille (La Sagne), R. Whitehead (St. Ives, Cornwall, England).

**Aufgabe 385.** Gegeben sind drei Kreise in drei verschiedenen, zu einander parallelen Ebenen. Gesucht wird ein Punkt $Z$ derart, dass die Projektionen der drei Kreise aus $Z$ sich gegenseitig berühren.

C. Bindschedler, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* Sollen die Projektionen von $K_1$ und $K_2$ sich berühren, so muss $Z$, je nachdem die Berührung von aussen oder von innen erfolgen soll, auf dem einen oder andern der beiden Kegel $K_{1,2}$, $K'_{1,2}$ liegen, die man durch $K_1$ und $K_2$ legen kann. Analog ergeben sich zwei weitere Kegel-Paare als Ort für $Z$. Wählt man, was auf achtfache Weise möglich ist, aus jedem der drei Paare einen Kegel aus, etwa $K_{1,2}$, $K_{2,3}$, $K_{3,1}$, so ist jeder gemeinsame Punkt derselben eine Lösung $Z$. Da $K_{1,2}$ und $K_{2,3}$ den Kreis $K_2$ gemeinsam haben, ist der Rest $C_2$ ihres Schnittes gleichfalls eben. Analog sind die Kegelschnitte $C_3$ und $C_1$ Örter für $Z$. Die Ebenen von $C_1$, $C_2$ und $C_3$ gehören einem Büschel an, dessen Achse die Kegel in ihren gemeinsamen Punkten trifft. ($8 \times 2 = 16$ Lösungen, wenn man nicht auf die Realität der Schnittpunkte achtet.)

**Aufgabe 386.** Let $p$ be a prime number, $p \equiv 1 \pmod 4$, $(a, p) = 1$, $r$ denote a quadratic residue and $n$ a quadratic non-residue of $p$. Prove that for each $a$ the congruence $r + n \equiv a \pmod p$ has exactly $(p-1)/4$ solutions $r, n$ $(1 \leqq r, n \leqq p-1)$.

A. Makowski, Warszawa

*Solution:* Let $\zeta = e^{2\pi i/p}$ and put

$$A = \sum_r \zeta^r\,, \quad B = \sum_n \zeta^n\,,$$

where the first sum is over the quadratic residues and the second sum is over the non-residues. Then

$$A + B = -1\,, \quad A - B = S\,,$$

where

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \zeta^k\,.$$

Then

$$A = \frac{1}{2}(S-1)\,, \quad B = -\frac{1}{2}(S+1)\,,$$

so that

$$A\,B = -\frac{1}{4}(S^2 - 1)\,.$$

Since

$$S^2 = p^{1)} \quad (p \equiv 1 \pmod 4)\,,$$

$$A\,B = -\frac{1}{4}(p-1) = \frac{1}{4}(p-1)\sum_{k=1}^{p-1}\zeta^k\,.$$

Since $r + n \not\equiv 0$, this proves the assertion.

For $p \equiv 3 \pmod 4$ we have $S^2 = -p$ so that

$$A\,B = \frac{1}{4}(p+1)\,.$$

Since in this case the congruence

$$r + n \equiv 0 \pmod p$$

has $(p-1)/2$ solutions we write

$$A\,B = \frac{1}{2}(p-1) - \frac{1}{4}(p-3) = \frac{1}{2}(p-1) + \frac{1}{4}(p-3)\sum_{k=1}^{p-1}\zeta^k\,.$$

Therefore when $p \equiv 3 \pmod 4$ the number of solutions of

$$r + n \equiv k \pmod p\,,$$

where $k \not\equiv 0 \pmod p$, is $(p-3)/4$. L. Carlitz, Duke University, Durham, N.C., USA

*2. Lösung:* Wir behandeln die Kongruenz $r + n \equiv a \pmod p$ in Verbindung mit den beiden andern $r + r' \equiv a$ und $n + n' \equiv a$, in denen $r'$ bzw. $n'$ quadratische Reste bzw. Nichtreste sind. $(r, n)$, $(r, r')$ und $(n, n')$ bezeichnen die Anzahl der Lösungen dieser drei Kongruenzen. Es sei zunächst $p \equiv 1 \pmod 4$, also $(-1/p) = +1$. Ist $x$ eine Lösung $r$ der ersten Kongruenz, so ist $(x/p) = +1$, $((a-x)/p) = ((x-a)/p) = -1$, also $x^{(p-1)/2} \equiv 1$, $(x-a)^{(p-1)/2} \equiv -1$. Ist $x$ dagegen ein Nichtrest $n$, so gilt in den letzten beiden Kongruenzen das entgegengesetzte Vorzeichen. Jedes $r$ oder $n$, das für eine Lösung von $r + n \equiv a$ in Frage kommt, genügt also der Kongruenz

$$x^{(p-1)/2} + (x-a)^{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod p\,. \tag{1}$$

Umgekehrt entspricht jeder Lösung von (1) ein Lösungspaar $r, n$ oder $n, r$ von $r + n \equiv a$. Entsprechend genügt jedes $r$ in $r + r' \equiv a$ und jedes $n$ in $n + n' \equiv a$ der Kongruenz

$$x^{(p-1)/2} - (x-a)^{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod p\,. \tag{2}$$

Für $x$ kommen alle Werte $1, 2, \ldots, p-1$ mit Ausnahme von $x = a$ in Frage. Sie genügen der Kongruenz

$$x^{p-1} - (x-a)^{p-1} \equiv 0 \pmod p\,, \tag{3}$$

die mod $p$ so viele Lösungen besitzt, wie ihr Grad $p-2$ angibt. Nun ist

$$x^{p-1} - (x-a)^{p-1} \equiv (x^{(p-1)/2} - (x-a)^{(p-1)/2})\,(x^{(p-1)/2} + (x-a)^{(p-1)/2})\,.$$

Daher besitzt (1) $(p-1)/2$ Lösungen und (2) $(p-3)/2$ Lösungen. Offenbar ist $(r, n) = (n, r)$ und aus $(r, n) + (n, r) = (p-1)/2$ folgt $(r, n) = (p-1)/4$, was zu beweisen war. Ist $p \equiv 3 \pmod 4$, also $(-1/p) = -1$, so ist $(a-x)^{(p-1)/2} = -(x-a)^{(p-1)/2}$ und für die Lösungen von $r + n \equiv a$ kommt nun (2) in Frage. Hieraus folgt $(r, n) = (p-3)/4$.

Für die beiden andern Anzahlen findet man leicht

$$(r, r') = (r, n) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-1}{p}\right) + \left(\frac{a}{p}\right)\right),$$

$$(n, n') = (r, n) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-1}{p}\right) - \left(\frac{a}{p}\right)\right).$$

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

---

1) Cf. H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 107 (Editorial Note).

Weitere Lösungen sandten O. REUTTER (Ochsenhausen) und E. TEUFFEL (Korntal/Stuttgart).

**Ergänzung zur Lösung von Aufgabe 356** (El. Math. *15*, 108 (1960))

Bei der Determination der Aufgabe ist mir, wie ich erst jetzt bemerke, ein Fall der Unbestimmtheit entgangen. Damit (in der dortigen Bezeichnungsweise) die Abbildung $P \to P_4$ zur Identität wird (so dass eine Ecke des verlangten Vierecks willkürlich angenommen werden kann), ist das Zusammenfallen der Geraden $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ nicht notwendig. Wenn etwa $A_1 A_2$ die Kugel nicht trifft, so sind die Fixpunkte der Korrespondenz $P \to P_2$ die Berührungspunkte der durch die Gerade $A_1 A_2$ an die Kugel gelegten Tangentialebenen. Die Abbildungen $P \to P_2$ und $P_2 \to P_4$ haben also auch dann dieselben Fixpunkte, wenn $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ reziproke Polaren sind. Für die identische Abbildung $P \to P_4$ ist dann weiter erforderlich, dass auch $A_2 A_3$ und $A_4 A_1$ reziprok sind. Die Bedingung, dass $A_1 A_2 A_3 A_4$ *Ecken eines Polartetraeders sind*, ist aber auch hinreichend, wie man am leichtesten erkennt, wenn etwa $A_1$ ins Kugelzentrum gelegt wird. Der Fall des allgemeinen Polartetraeders lässt sich durch eine projektive Transformation der Kugel in sich auf diesen speziellen zurückführen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

# Neue Aufgaben

**Aufgabe 411.** Eine $n$-gliedrige Folge konsekutiver natürlicher Zahlen heisse eine $(n, t)$-Kette bzw. eine $[n, t]$-Kette, wenn jedes Element mindestens bzw. höchstens $t$ verschiedene Primteiler besitzt. Man beweise:

1. Sind $N$ und $T$ beliebige natürliche Zahlen, so gibt es unendlich viele $(N, T)$-Ketten.
2. Es gibt eine natürliche Zahl $n_t$, so dass bei gegebenem $t$ für $n > n_t$ nur endlich viele $[n, t]$-Ketten existieren.
3. $n_t < 2\, p_1 p_2 \dots p_t$ ($p_i = i$-te Primzahl).

(Vgl. zu diesem Problemkreis auch *Ungelöste Probleme* Nr. 31 (El. Math. *14*, 82–83 (1959))). E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

**Aufgabe 412.** Man beweise: Für das ganzwertige Polynom $\binom{x}{n}^2$ vom Grad $2\,n$ gilt die Darstellung

$$\binom{x}{n}^2 = \binom{n}{0}\binom{n}{0}\binom{x}{n} + \binom{n+1}{1}\binom{n}{1}\binom{x}{n+1} + \binom{n+2}{2}\binom{n}{2}\binom{x}{n+2} + \dots + \binom{2\,n}{n}\binom{n}{n}\binom{x}{2\,n}.$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

**Aufgabe 413.** Gegeben ist eine Fläche zweiter Ordnung $\Phi$ und zwei in bezug auf sie konjugierte Polaren $q, r$. Man bestimme alle Flächen mit der Eigenschaft, dass die Tangentialebene in jedem Flächenpunkt $P$ die Geraden $q, r$ in zwei zu $P$ konjugierten Punkten schneidet. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 414.** Jeder Ellipsenschnitt eines Drehzylinders geht bekanntlich bei Verebnung des Zylinders in eine Sinuslinie über. Welchen Winkel muss die schneidende Ebene mit der Zylinderachse einschliessen, damit der Schmiegkegelschnitt in einem Scheitel der verebneten Kurve eine gleichseitige Hyperbel ist? R. BEREIS, Dresden

**Aufgabe 415.** Show that

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n}{r}^2 \frac{(n-2\,r)\,(n-2\,r-1)\dots(n-2\,k+1)}{(k-r)!\,(n-2\,r-1)\,(n-2\,r-2)\dots(n-k-r)} = \frac{n!}{k!\,k!\,(n-2\,k)!}\ (2\,k \leqq n)\,.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N. C., USA

# Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, $x$-Achse nach rechts, $y$-Achse nach vorn, $z$-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Der Grundriss eines Körpers ist ein Kreis mit dem Radius $r$, sein Aufriss wird von der $x$-Achse und einem Halbkreis mit dem Radius $r$ begrenzt. Dritte Hauptebenen schneiden ihn in quadratischen Parabeln mit erstprojizierender Achse. Berechne sein Volumen.

   ▶ $V = \frac{16}{9} r^3$.

2. Die Kurven mit den Gleichungen $y_1 = e^{-x}$ und $y_2 = e^{x+a}$ begrenzen mit der $x$-Achse einen Teil der Ebene mit endlicher Fläche. Wie ist $a$ zu wählen, damit diese Fläche gleich der Einheit wird?

   ▶ $a = -\ln 4$.

3. $2u$ ist der Durchmesser einer Halbellipse, der dazu konjugierte Halbmesser $v$ bildet mit $2u$ den Winkel $\alpha$. Welches Volumen wird durch Rotation um $2u$ erzeugt?

   ▶ $V = \frac{4\pi}{3} u v^2 \sin^2\alpha$. Verwende die Guldinsche Regel und beachte, dass die Lage des Schwerpunkts einer ebenen Figur affin-invariant ist.

4. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ rotiert um eine ihrer Tangenten. Das erzeugte Volumen ist $V$. Die Tangente ist zu bestimmen.

   ▶ Für den Abstand der Tangente vom Mittelpunkt der Ellipse ergibt sich

$$d = \frac{V}{2\pi^2 a b}.$$

   Fällt man die Lote $u$ und $v$ von den Brennpunkten auf die Tangente, so liegen die Fusspunkte auf dem Hauptkreis der Ellipse, und es gilt $u + v = 2d$, $u v = b^2$, demnach

$$u, v = d \pm \sqrt{d^2 - b^2}.$$

5. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$, der Fläche $S$ und dem Achsenverhältnis $b/a = \cos\varphi$ rotiert um die Hauptachsen. Die erzeugten Flächen werden

$$F_1 = 2S\left(\cos\varphi + \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right) \text{ für das spindelförmige,}$$

$$F_2 = 2S\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right) \text{ für das linsenförmige Ellipsoid.}$$

# Literaturüberschau

*Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte.* Par J. ACZÉL et S. GOŁAB. Tome 39 des Monographies mathématiques publiées par l'Académie des Sciences polonaise. 172 p. – Editions scientifiques de l'Etat, Varsovie 1960.

La théorie des objets géométriques est un domaine des mathématiques contemporaines qui puise ses racines dans la géométrie différentielle. Les éléments fondamentaux de cette théorie ont été présentés en 1934 par M. A. WUNDHEILER à la première conférence internationale de géométrie différentielle tensorielle, tenue à Moscou, exposé qui a attiré l'attention de nombreux mathématiciens. Durant le dernier quart de siècle, la théorie des objets géométriques s'est développée en une discipline indépendante et plus de 170