Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik

Autor(en): **Locher-Ernst, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21902

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVII Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1962

Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik[1])

5. Während die im letzten Abschnitt erwähnten Untersuchungen betreffend die Probleme der formalen Entscheidbarkeit und der formalen Widerspruchsfreiheit im üblichen Wissenschaftsbetrieb einen anerkannten Bestand darstellen, findet man gegenüber den Fragen der absoluten Entscheidbarkeit und der absoluten Widerspruchslosigkeit weitherum – bildlich gesprochen – ein blosses Achselzucken. Einen Grund dafür bildet eine gewisse Ohnmacht in der Behandlung der Antinomien.

Nehmen wir die bekannte Frage:

«Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit weniger als hundert Silben in deutscher Sprache definiert werden kann?»

Man schliesst einerseits, dass es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die mit weniger als hundert Silben definiert werden können, dass es also noch andere natürliche Zahlen gibt, unter denen die kleinste die gesuchte Zahl darstelle. Anderseits aber folgert man, dass eine solche allenfalls existierende, durch den obigen Satz bestimmte Zahl im Widerspruch zu jenem doch mit weniger als hundert Silben definiert wäre.

Über solche «Antinomien» wird ernsthaft diskutiert. Ich vermute, dass man schon in naher Zukunft sich darüber wundern wird, wie man ehemals sich durch solche Primitivitäten beirren lassen konnte. Der *Inhalt* der obigen Frage ist nämlich grundsätzlich derselbe wie in der folgenden: Welches ist die kleinste gerade Zahl, die ungerade ist?

Wenn man in der Fragestellung etwas sich Widersprechendes *fordert*, braucht man nicht erstaunt darüber zu sein, dass sich Widersprüche ergeben.

Was an diesem Beispiel leicht zu sehen ist, stellt auch den Kern der vielen bekannten Antinomien der Mengenlehre dar. Nur ist dieser Kern mehr oder weniger verkleidet. An einem grundlegenden Beispiel sei dies erläutert. Das Wort Menge wird als Bezeichnung eines Begriffes verwendet, der mit einem anderen Begriff, mit demjenigen des Elementes, in einer gewissen Verbindung steht, die gewissen formalen Regeln genügt: Die Menge enthält ein Element oder enthält es nicht. Die Beziehung des Enthaltens sei mit β bezeichnet.

Nun seien (mindestens zwei) verschiedene Dinge $a, b, c, \ldots$ gegeben. Wir bilden aus ihnen, *soweit es möglich ist*, Mengen. Das heisst, wir denken die Begriffe, die die Beziehung β zu einem oder zu mehreren der gegebenen Dinge haben. Auch diese Mengen vereinigen wir, *soweit es möglich ist*, zu weiteren Mengen. Damit ist eine

[1]) Fortsetzung der Artikel in El. Math. *16* (1961), Hefte 5 und 6.

Vorschrift erklärt, beginnend mit gegebenen Dingen fortlaufend Mengen zu bilden. Nichts hindert uns, von der Gesamtheit dieser Mengen zu sprechen, sofern wir damit bloss eine abkürzende Bezeichnung meinen.

Es kommen dabei sicher Mengen vor, die sich nicht selbst enthalten. Der Beweis[2]) hierfür läuft wie folgt: Es seien a und b zwei verschiedene Dinge. Wir bilden die Menge A, deren einziges Element a ist, die Menge B, deren einziges Element b ist, und die Menge C, deren Elemente a und b sind. Nehmen wir nun an, es würde gleichzeitig gelten $A\beta A$, $B\beta B$ und $C\beta C$, so müsste $A \equiv a$, $B \equiv b$ und $C \equiv a$ oder $C \equiv b$ sein, also $C \equiv A$ oder $C \equiv B$, während C doch von A und von B verschieden ist.

Wir können somit aus der vorangehend erklärten Gesamtheit von Mengen diejenigen ins Auge fassen, die sich nicht selbst enthalten. Wir sprechen vom System S dieser Mengen $U, V, W, \ldots$. Wenn S eine Menge ist, wenn also der Begriff S genau zu den Mengen $U, V, W, \ldots$ des Systems die Beziehung β besitzt, so können wir prüfen, ob entweder $S\beta S$ oder S nicht βS gilt.

Wäre $S\beta S$, so würde also S eine Menge des Systems darstellen. Dieses besteht aber aus Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Somit gilt S nicht βS.

Wäre aber S nicht βS, so würde S eine Menge des Systems darstellen, somit müsste $S\beta S$ gelten.

Der selbstverständliche Schluss, der daraus zu ziehen ist, lautet sehr einfach: *Das System S ist keine Menge.* Es zeigt sich eben, dass man zwischen dem blossen *nomen* «Gesamtheit» oder «System» und dem wirklichen Begriff Menge streng zu unterscheiden hat. Es ist keineswegs am Platze, sich darüber zu wundern. Wer jenes System doch als eine wirkliche Menge betrachten will, verlangt grundsätzlich dasselbe wie derjenige, der die kleinste gerade Zahl, die ungerade ist, als wirkliche Zahl werten möchte.

Wir könnten so der Reihe nach die bekannten Antinomien der Mengenlehre durchnehmen. Es geht stets darum, dass man nur dann zu solchen kommt, wenn man im Fortgang der Gedankenbildung sich selbst widerspricht. Es ist das kaum hoch genug einzuschätzende Verdienst des Schweizer Mathematikers PAUL FINSLER, diese Sachlage längst aufgeklärt zu haben[3]).

Für den Unterricht mag es interessant sein, ein einfaches Beispiel einer Menge vorzuführen, die sich selbst enthält. Auf die linke Tafel schreibe man:

A sei die Menge mit den Elementen 1 und 2. B sei die Menge mit den Elementen 2 und 3. C sei die Menge, deren Elemente alle hier erklärten Mengen sind. Dann gilt $C\beta A$, $C\beta B$, $C\beta C$.

Würde man hingegen auf die linke Tafel schreiben: A sei die Menge mit den Elementen 1 und 2, B sei die Menge mit den Elementen 2 und 3; und auf die rechte Tafel: C sei die Menge, deren Elemente die dort erklärten Mengen sind, so gilt $C\beta A$, $C\beta B$ und C nicht βC.

Solange sich der Mathematiker des inhaltlichen, diskursiven Schliessens bedient, gilt der Satz, dass ein *einziger* Widerspruch die *ganze* Begriffsbildung zu Fall bringt. Wer nun am eigenen Denken in mathematischen Begriffen zu zweifeln beginnt und meint, vielleicht seien Widersprüche doch nicht zu vermeiden, muss aus dieser Ohnmacht *notwendig* auf das Geleise des blossen Formalismus gedrängt werden. Selbstverständlich lassen sich *formale* mehrwertige Logiken entwickeln, die als Mechanis-

---

[2]) Nach P. FINSLER: Über die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. *25* (1926), p. 686.

[3]) P. FINSLER: Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. *34* (1925), sowie die in Fussnote [2]) angegebene Abhandlung.

men zu diesem oder jenem Zwecke brauchbar sind. Dann ist aber die Mathematik zur blossen Automatik degradiert.

Nach diesen Hinweisen erinnern wir nun an die zwar wenig bekannte, überragend wichtige, oft verschwiegene, aber – soweit uns bekannt ist – niemals widerlegte Tatsache, die FINSLER[4]) entdeckte. Sie gilt für hinreichend allgemeine formale Systeme, deren Grundsätzen und Regeln (siehe Abschnitt 4) auch ein inhaltlicher Sinn zukommt: *Es lassen sich stets Sätze, also Zeichenkombinationen angeben, die sicher formal widerspruchsfrei sind, aber inhaltlich doch einen angebbaren Widerspruch enthalten.*

Der Beweis hierfür ist keineswegs allzu schwer. Immerhin wäre es wünschenswert, wenn er von verschiedenen Fachleuten neu durchgearbeitet und vielleicht sogar noch wesentlich vereinfacht werden könnte, damit die Einsicht in diese fundamentale Tatsache, die grundsätzlich über die berühmt gewordene Gödelsche Bemerkung weit hinausgeht, möglichst bekannt würde, in erster Linie in Kreisen der Mathematiklehrer.

L. LOCHER-ERNST

[4]) P. FINSLER: Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. Math. Zeitschrift *25* (1926).

Schaltalgebra

1. Einleitung

Die *Logik* ist eine uralte Disziplin der Geisteswissenschaften. Gelehrte aus verschiedenen Kulturvölkern haben sich immer wieder mit ihr abgegeben, und sie hat zuweilen auch recht seltsame Blüten getrieben. Ein Teil der ihr innewohnenden faszinierenden Problematik mag davon herrühren, dass der Gegenstand der Untersuchung selbst wesentlich als Instrument verwendet wird. Für eine ausführliche geschichtliche Übersicht sei auf [1][1]) verwiesen. Man findet dort auch eine sehr umfangreiche Bibliographie.

Ein wichtiger Abschnitt in der historischen Entwicklung setzt dort ein, wo man beginnt, in Richtung auf die Mathematik hin zu formalisieren. Der Name von GEORGE BOOLE muss in diesem Zusammenhang genannt werden. Seine grundlegenden Publikationen stammen aus der Mitte des letzten Jahrhunderts (siehe vor allem [2]). Wesentlich ist für uns, dass ein Kalkül gebildet wird, der nach gewissen, leicht zu formulierenden Regeln funktioniert und schliesslich sogar von der inhaltlichen Deutung gelöst werden kann. Diese mathematische Logik hat sich zu einem kräftigen Instrument für die Erforschung der Grundlagen der Mathematik entwickelt. So ist ja zum Beispiel das Werk von HILBERT und BERNAYS auf diesem Gebiet berühmt geworden [4]. Eine Einführung in die mathematische Logik, besonders auch den Aussagenkalkül, gibt das Buch von HILBERT und ACKERMANN [3].

Auf der anderen Seite hat die *Technik der Nachrichtenübertragung und der Automatik* in unserem Jahrhundert eine stürmische Entwicklung genommen. Schon bald wurden elektrische Schaltkreise von solchen Ausmassen verwendet, dass es immer schwieriger war, die Übersicht zu behalten, und es entstand das dringende Bedürfnis nach einer «Kurzschrift» für die Beschreibung von Schaltungen. Aus dem Verlangen, immer schnellere und kompliziertere Apparate zu bauen, ergab sich eine Entwicklung von mechanischen Konstruktionen über elektromechanische (Schalter, Relais) zu

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.