Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 1

PDF erstellt am: **14.09.2024**

vall $-\infty < t < \infty$ definierte, reellwertige und stetige Funktionen, die periodisch sind, so dass die Relationen $x(t+1) = x(t)$ und $y(t+1) = y(t)$ gelten. Ferner sei $f(r, s) = \{x(r) - x(s)\}^2 + \{y(r) - y(s)\}^2$ gesetzt und weiter verlangt, dass $f(r, s) > 0$

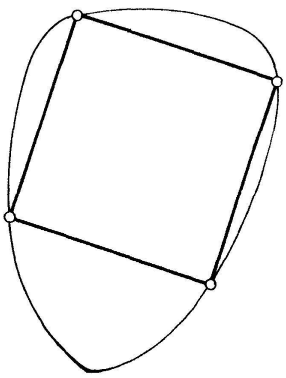


Fig. 1

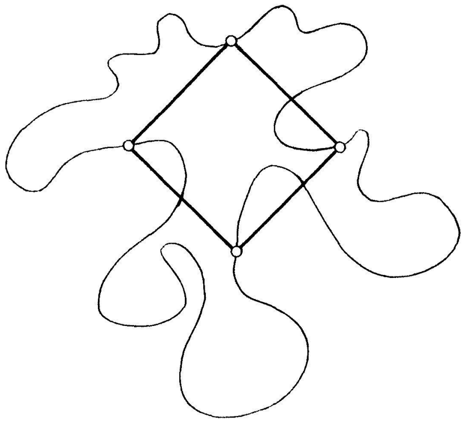


Fig. 2

ausfällt, falls $r \not\equiv s \pmod 1$ ist. Behauptung: Es existieren vier Werte t_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ derart, dass

$$0 < f(t_1, t_3) = f(t_2, t_4) = 2\, f(t_1, t_2) = 2\, f(t_2, t_3) = 2\, f(t_3, t_4) = 2\, f(t_4, t_1)$$

wird. Der Leser kann leicht die Äquivalenz dieser Behauptung mit der eingangs in anschaulicherer geometrischer Gestalt erörterten Vermutung überprüfen. Einen Beweis zu finden oder ein Beispiel zu entdecken, das zeigt, dass der Satz falsch sein muss, ist das hier vorgelegte ungelöste Problem. H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Zum Mordellschen Beweis einer Ungleichung von Erdös

1. Ein einfacher Beweis

Von P. ERDÖS [1][1]) stammt die unseres Erachtens reizvollste unter den heute bekannten Dreiecksungleichungen:

Die Summe der Eckenabstände des inneren Punktes O eines Dreiecks ist mindestens doppelt so gross wie die Summe seiner Seitenabstände. Gleichheit gilt nur für den Mittelpunkt O eines gleichseitigen Dreiecks.

Behauptung: $R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2\,(r_1 + r_2 + r_3)$.

Beweis: Der Figur entnimmt man $\overline{QR} = R_1 \sin\alpha$ und

$$\overline{QR} \geqq \overline{XY} = \overline{PY} + \overline{PX} = r_2 \sin\gamma + r_3 \sin\beta\,, \tag{1}$$

weil eine Strecke mindestens so gross ist wie ihre Normalprojektion auf eine andere.

Demnach gilt

$$R_1 \geqq r_2 \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + r_3 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

und Entsprechendes für R_2 und R_3, so dass schliesslich

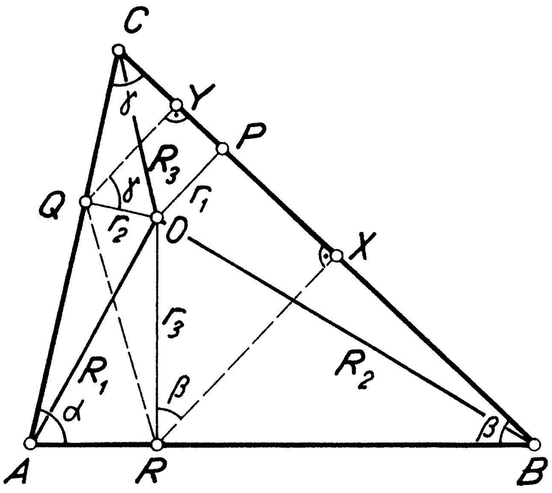
$$\Sigma R_i \geqq r_1 \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + r_2 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) + r_3 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$$

$\geqq 2\, \Sigma r_i$ noch durch dreimaliges Anwenden von $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ für $x > 0$ folgt.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 17.

Gleichheit ist nur möglich für $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, wobei sie aber wegen (1) nur eintritt, wenn jede Seite des Hilfsdreiecks PQR zur entsprechenden Seite des Bezugsdreiecks ABC parallel ist, womit O Mittelpunkt eines regulären Dreiecks sein muss.

Wegen $\sin\varphi \equiv \sin(\pi - \varphi)$ verläuft der Beweis im stumpfwinkligen Dreieck gleich, auch dann, wenn eine Ecke des Hilfsdreiecks auf die Verlängerung einer Seite des Bezugsdreiecks fallen sollte.



2. Bemerkungen dazu

Der vorgetragene Beweis ist nicht mehr als eine Vereinfachung desjenigen von MORDELL [2]. Er scheint uns mitteilenswert, weil durch Interpretation eines dortigen Zwischenresultates sowohl Cosinussatz als auch anschliessende goniometrische Umformung umgangen werden können. Mit dem Mordell-Beweis in vorliegender Form und einem hübschen Beweis von EGGLESTON [3] – ähnlich wie dieser ging später OPPENHEIM [4] vor – hat der Mathematiklehrer heute zwei einfache Begründungen des Satzes von ERDÖS zur Hand, die dem Mittelschüler schon in unteren Klassen verständlich sind und Freude bereiten, was der Verfasser selbst ausprobierte.

Für eine Verschärfung des Satzes, welche zuerst BARROW [5] bekanntgab, existiert unseres Wissens bis heute kein so einfacher Beweis. Wird die Halbierende w_1 des Winkels BOC an die Stelle von r_1 gesetzt und haben w_2 und w_3 entsprechende Bedeutung, so gilt nämlich

$$\sum R_i \geqq 2 \sum w_i . \tag{2}$$

Starke Indizien sprechen für die Gültigkeit des folgenden Satzes für einen beliebigen inneren Punkt O eines konvexen n-Eckes:

$$\sum R_i \geqq \sec\frac{\pi}{n} \sum w_i . \tag{3}$$

R_i und w_i haben dabei analoge Bedeutung wie in (2), und (3) ist eine Verschärfung der Vermutung

$$\sum R_i \geqq \sec\frac{\pi}{n} \sum r_i , \tag{4}$$

wobei $\sum r_i$ die Summe der Seitenabstände von O bedeutet, von FEJES TÓTH [6]. Wir bemerken dazu, dass (3) nicht nur für $n = 3$, sondern von FLORIAN [7] verdeckt beim Beweis von (4) auch für $n = 4$ verifiziert wurde. Bei ihm sind nämlich R_i, R_{i+1} zwei aufeinanderfolgende Eckenabstände von O, die den Winkel $2\,\varphi_i$ einschliessen, r_i der entsprechende Seitenabstand von O. Der Beweis von FLORIAN geht dann davon aus, dass $r_i \leqq \sqrt{R_i R_{i+1}} \cdot \cos\varphi_i$. Halbiert aber w_i den Winkel $2\,\varphi_i$, so gilt natürlich auch

$$w_i = \frac{2\,R_i\,R_{i+1}}{R_i + R_{i+1}} \cos\varphi_i \leqq \sqrt{R_i R_{i+1}} \cos\varphi_i \quad \text{wegen } H \leqq G .$$

Bedenkt man, dass R_i und R_{i+1} etwa mit der Polygonseite a_i das Dreieck Δ bilden, so wird man sich sofort fragen, ob an Stelle der auf a_i gefällten Höhe wie in (4) oder der Winkelhalbierenden w_i von $2\varphi_i$ wie in (3) auch die von O ausgehende Seitenhalbierende m_i von a_i gesetzt werden darf, was verneint werden muss! Vielmehr gilt

$$\sum R_i > \sum m_i\,, \tag{5}$$

eine Ungleichung, die nicht verschärft werden kann. Bei (5) handelt es sich fast um eine Trivialität. Ergänzt man Δ zum Parallelogramm mit den Seiten R_i und R_{i+1}, so gilt die Dreiecksungleichung

$$R_i + R_{i+1} > 2\,m_i$$

und (5) ergibt sich durch Summation von n solchen Ungleichungen. Dass für $n = 3$ keine Verschärfung möglich ist, sieht man sofort, wenn man etwa die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gegen Null und simultan O gegen die Spitze streben lässt. Für beliebiges n kann man ähnlich vorgehen. Dem Beweisgang entnimmt man zudem, dass für die Gültigkeit von (5) O nicht einmal innerer Punkt des Polygons sein muss und die Eckpunkte desselben ebensowenig in ein und derselben Ebene zu liegen haben. Von Konvexität erst ist gar keine Rede.

Ist O dagegen innerer Punkt eines ebenen konvexen n-Ecks, so gilt für die geometrischen Mittel [8]

$$G(R_i) \geqq \sec\frac{\pi}{n}\,G(w_i)\,, \tag{6}$$

was von Fejes Tóth [9] verdeckt (wie bei Florian) im Grunde genommen schon bewiesen wurde. Auch hier darf w_i nicht durch m_i ersetzt werden.

Diese Bemerkungen mögen dazu dienen, die Solidarität der Höhen und Winkelhalbierenden gegenüber den Seitenhalbierenden darzutun, wobei wir hier auf eine tiefere Begründung verzichten. F. Leuenberger, Zuoz

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. Erdös, Aufgabe 3740, Amer. Math. Monthly *42* (1935).
[2] L. J. Mordell, Lösung zu Aufgabe 3740, Amer. Math. Monthly *44* (1937).
[3] H. G. Eggleston, Math. Gaz. *42*, 54–55 (1958). Die Kenntnis dieses Beweises verdankt der Verfasser freundlichen Mitteilungen von H. Hadwiger und E. Trost.
[4] A. Oppenheim, *The Erdös Inequality and Other Inequalities for a Triangle*, Amer. Math. Monthly *68*, 226–230 (1961).
[5] Barrow, Lösung zu Aufgabe 3740, Amer. Math. Monthly *44* (1937).
[6] L. Fejes Tóth, *Inequalities Concerning Polygons and Polyhedra*, Duke Math. J. *15*, 817–822 (1948).
[7] A. Florian, *Zu einem Satz von* P. Erdös, El. Math. *13*, 55–58 (1958).
[8] Einfacher Beweis ohne Logarithmierung erscheint in Amer. Math. Monthly, *On a polygonal inequality due to* L. Fejes Tóth.
[9] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer, Berlin 1953), S. 33.

Anmerkungen bei der Korrektur: Ein Beweis der Ungleichung (3) erscheint von H. Chr. Lenhard tatsächlich unter dem Titel «Verallgemeinerung und Verschärfung der Erdös-Mordellschen Ungleichung für Polygone» im Archiv d. Math., ohne dass Herr Lenhard etwa von des Verf. Vermutung Kenntnis gehabt hätte. Ferner bemerkte der Verf. während der Drucklegung des Manuskriptes, dass L. Bankoff in Amer. Math. Monthly *65*, 521 (1958) ganz ähnliche Überlegungen wie bei unserem «einfachen Beweis» anstellte (ohne Winkelfunktionen) und D. K. Karinoff in Mich. Math. J. *4*, 97–98 (1957) einen weiteren Beweis für diese spezielle Dreiecksungleichung brachte.

Bemerkung der Redaktion

Der in der kleinen Mitteilung von N. Kritikos über den vektoriellen Beweis eines elementargeometrischen Satzes [El. Math. *16*, 132 (1961)] behandelte Satz samt Beweis findet sich in der Rubrik «Aufgaben für die Schule» in El. Math. *12*, 135 (1957). Wie uns W. Lüssy mitteilt, stammt der Beweis wohl von H. van Aubel, Mathesis 1895. W. Jänichen berichtet, dass derselbe Beweis auch in den Vorlesungen über Vektorenrechnung von E. Jahnke (Leipzig 1905, Seite 55) zu finden ist.