Kleine Einführung in die Topologie

Autor(en): **Ebersold, Johannes M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 3

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21910

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVII Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1962

Kleine Einführung in die Topologie

Kurz gefasst könnte man die Topologie, im Gegensatz zur metrischen Geometrie, stetige Geometrie nennen. Eine Abbildung eines geometrischen Gebildes auf ein anderes heisst *topologisch*, wenn sie ein-eindeutig und in beiden Richtungen stetig ist. Urbild und Bild einer topologischen Abbildung heissen homöomorphe Gebilde. Die Homöomorphie spielt in der Topologie dieselbe Rolle, wie die Kongruenz in der euklidischen Geometrie. Aufgabe der Topologie ist es, diejenigen Eigenschaften eines geometrischen Gebildes aufzufinden, welche es mit seinen homöomorphen Gebilden gemein hat. Offensichtlich sind die Massverhältnisse vom Standpunkt der Topologie aus belanglos. Wir erwähnten die Stetigkeit; was ist das überhaupt, wenn wir von Massverhältnissen absehen? Auch diese Frage zu beantworten, gehört zur Aufgabe der Topologie. Bevor wir nun auf diese Frage eingehen, geben wir zwei Beispiele aus der Topologie, wobei wir allerdings auf eine präzise Formulierung verzichten müssen.

Betrachten wir die Oberfläche eines Würfels. Vom topologischen Standpunkt aus können wir sie auch eine Kugelfläche nennen, auf der eine gewisse Einteilung in Gebiete vorliegt. Bezeichnen wir die Anzahlen der Eckpunkte, Kanten und Gebiete mit e, k und f, so zeigt sich, dass die Relation $e - k + f = 2$ gilt. Eine weitere Untersuchung lehrt, dass für jede beliebige Einteilung der Kugelfläche in Gebiete dieser Zusammenhang zwischen e, k und f besteht. Dies hat EULER erkannt und man nennt dies den Eulerschen Polyedersatz. Ob wir nun eine Gebietseinteilung auf der Kugelfläche oder die entsprechende Einteilung auf einem topologischen Bilde der Kugel betrachten, ist doch gleichgültig. Also haben wir hier eine topologische Eigenschaft der Kugelfläche vor uns. Würden wir analoge Gebietseinteilungen auf der Ringfläche (Torus) untersuchen, so würde sich herausstellen, dass für diese stets $e - k + f = 0$ gilt. Daraus ergibt sich, dass Kugelfläche und Ringfläche nicht homöomorph sind. Der Eulersche Polyedersatz gehört der sogenannten algebraischen Topologie an, von der im weiteren nicht die Rede sein wird.

Sei C ein topologisches Bild einer Kreislinie K, das in der euklidischen Ebene liegt, das heisst, anschaulich gesagt, eine «einfach geschlossene Kurve» der Ebene. Der Jordansche Kurvensatz sagt aus: C zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete und ist deren Rand. SCHOENFLIES hat den Satz folgendermassen erweitert: Es gibt eine topologische Abbildung der ganzen Ebene, in der K liegt, auf die ganze Ebene von C, welche K auf C abbildet und das «Innere» bzw. «Äussere» von K auf das «Innere» bzw. «Äussere» von C, das heisst also, dass zum Beispiel das «Innere» von K dem

«Inneren» von C homöomorph ist. Man wird nun sagen, das ist doch anschaulich ziemlich klar. Denken wir uns die entsprechende Situation im Raume. Da hat nun ANTOINE gezeigt, dass es im euklidischen Raum topologische Bilder der Kugelfläche gibt, deren «Inneres» dem «Inneren» der Kugelfläche nicht homöomorph ist. Dazu wird kaum einer sagen, das sei von vornherein anschaulich klar! Während der Eulersche Polyedersatz eine «innere» Eigenschaft der Kugelfläche darstellt, das heisst die Lage der Kugelfläche spielt keine Rolle, handelt es sich hier um Lageeigenschaften, genauer gesagt um Fragen der Einbettung von zur Kreislinie bzw. Kugelfläche homöomorphen Gebilden in die euklidische Ebene bzw. den euklidischen Raum. Das hier Besprochene gehört mehr der sogenannten mengentheoretischen Topologie an, die zu den Grundlagen der Mathematik zu rechnen ist und auf die wir etwas weiter eingehen wollen.

Es sei noch ein kurzer Blick auf die Geschichte der Topologie geworfen. LEIBNIZ ahnte die Topologie und sprach 1679 von deren Notwendigkeit. Aber GAUSS musste 1833 sagen, dass auf diesem Gebiete noch kaum etwas erreicht worden sei. Die Grundlagen, um den Stetigkeitsbegriff korrekt zu fassen, waren noch nicht vorhanden. Bevor Entscheidendes geleistet werden konnte, musste eine Loslösung von der natürlichen Raumesvorstellung stattfinden, die es dem Denken ermöglichte, den Raumesbegriff zu fassen, was in sich schliesst, dass es für das Denken auch andere «Räume» als «unsern» Raum gibt. Hiefür waren die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie und vor allem die Forschungen RIEMANNS von Bedeutung. Den eigentlichen Anstoss für die Entwicklung der mengentheoretischen Topologie gab CANTOR, indem er die Mengenlehre geschaffen hat (1879–1884).

Wir benützen im folgenden die grundlegenden Mengenoperationen. Sind M und N zwei Teilmengen einer Menge R von Objekten, genannt Elemente von R, so sei

a) die Vereinigung $M \cup N$ von M und N die Teilmenge derjenigen Elemente von R, die in M oder in N enthalten sind,

b) der Durchschnitt $M \cap N$ von M und N die Teilmenge derjenigen Elemente von R, die sowohl in M als auch in N enthalten sind,

c) das Komplement $c\,M$ von M die Teilmenge derjenigen Elemente von R, die nicht in M enthalten sind.

Diese drei Operationen erfüllen die Regeln der Booleschen Algebra.

Wir wollen nun einige Grundbegriffe erklären, wobei wir zunächst unserer Betrachtung einen *metrischen Raum* zugrunde legen. Darunter verstehen wir eine Menge R von gewissen Objekten, genannt Punkte, in der für jedes Paar von Punkten p, q eindeutig eine Funktion $d(p, q)$, genannt Abstand, definiert ist. Diese Funktion muss, um dem, was wir anschaulich unter Abstand verstehen, gerecht zu werden, reell sein und die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $d(p, q) \geq 0$.
2. $d(p, q) = 0$ nur für $p = q$.
3. $d(p, q) = d(q, p)$.
4. $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$. (Dreiecksungleichung)

Die euklidische Ebene E^2 ist ein metrischer Raum, und in ihr geben wir Beispiele zu den folgenden Definitionen, wobei irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem festgelegt sei.

Umgebung eines Punktes p von R: Für jedes $\varrho > 0$ heisst die Menge $U(p, \varrho)$ aller Punkte q von R, für die $d(p, q) < \varrho$ gilt, eine Umgebung von p.

(Beispiel: Inneres einer Kreisscheibe vom Radius ϱ um den Mittelpunkt p.)

Offene Menge. Eine Teilmenge M von R heisst offen, wenn jeder Punkt von M eine Umgebung besitzt, welche ganz in M enthalten ist, das heisst M besteht nur aus sogenannten inneren Punkten.

(Beispiel: das Innere oder Äussere eines endlichen einfach geschlossenen Streckenzuges.)

Die oben definierten Umgebungen sind offene Mengen. Jede offene Menge, welche eine Umgebung von p enthält, nennen wir von nun an ebenfalls eine Umgebung von p. Für offene Mengen sieht man leicht die folgenden Sätze ein:

Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

(Dabei wird vereinbart, dass die leere Menge offen sei.)

Dass der letzte Satz für unendlich viele Mengen falsch sein kann, zeigt folgendes Beispiel in E^2. Sei $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ eine Folge von positiven Zahlen, für welche $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0$ ist. Dann gilt für jeden Punkt p

$$U(p, \varrho_1) \cap U(p, \varrho_2) \cap U(p, \varrho_3) \cap \ldots = p$$

und der Punkt p stellt in E^2 keine offene Menge dar.

Abgeschlossene Menge. Eine Teilmenge M von R heisst abgeschlossen, wenn ihr Komplement $c\,M$ eine offene Menge ist.

(Beispiele: Jeder endliche Streckenzug. Jeder einfach geschlossene endliche Streckenzug unter Einschluss seines Innern. Die Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten).

Die genannten Sätze für offene Mengen lassen sich für abgeschlossene Mengen wie folgt übersetzen (am einfachsten durch Verwendung von Regeln der Booleschen Algebra):

Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Häufungspunkt p einer Menge M. p heisst Häufungspunkt von M, wenn jede Umgebung von p mindestens einen, von p verschiedenen, Punkt von M enthält.

(Beispiel: Jeder Punkt $p(x, y)$ von E^2 mit $x = 0$, $|y| \leq 1$ ist Häufungspunkt der Menge der Punkte, für deren Koordinaten $y = \sin 1/x$, $x \neq 0$ gilt.)

Ist jeder Punkt von R Häufungspunkt einer Menge M, so heisst M *dicht* in R.

(Beispiel: Die Menge aller Punkte von E^2 mit rationalen Koordinaten ist dicht in E^2).

Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält. Beweis: a) M sei abgeschlossen. Jeder Punkt p von $c\,M$, das ja offen ist, besitzt eine Umgebung, die ganz in $c\,M$ liegt, also keinen Punkt von M enthält; das heisst, p ist nicht Häufungspunkt von M. b) M enthält alle seine Häufungspunkte. Jeder Punkt p von $c\,M$ besitzt, da er nicht Häufungspunkt von M ist, mindestens eine Umgebung, die keinen Punkt von M enthält, die also ganz in $c\,M$ liegt; das heisst, $c\,M$ ist offen, also M abgeschlossen.

Abgeschlossene Hülle einer Menge M heisst die Vereinigung von M mit allen ihren Häufungspunkten.

Nun sagen wir uns von dem metrischen Raum, der uns zur Einführung einiger Grundbegriffe gedient hat, los und geben eine Definition eines allgemeinen topologischen Raumes.

Gegeben sei eine Menge R von «Punkten». Gewisse Teilmengen von R seien ausgezeichnet als *offene Mengen.* Auf diese Weise wird in R eine Topologie eingeführt und damit R zu einem *topologischen Raum,* sofern die folgenden Axiome erfüllt sind.

1. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
2. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
3. Der ganze Raum und die leere Menge sind offen.

Liegt solch ein topologischer Raum vor, so definieren wir für jeden Punkt p von R: Jede offene Menge, die p enthält, ist eine Umgebung von p. Die übrigen oben definierten Begriffe lassen sich nun ebenso einführen und es gelten auch die über sie gemachten Aussagen.

Nach diesen Definitionen sind wir nun in der Lage, den Begriff der *Stetigkeit* zu präzisieren. Sei f eine Abbildung eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y. Ist N eine Teilmenge von Y, so heisst die Gesamtheit M der Punkte von X, deren Bild in N liegt, das Urbild von N (M kann leer sein!).

f heisst stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge von Y eine offene Menge von X ist.

Eine, der in der Analysis üblichen, entsprechende Definition, von der man die Äquivalenz mit der gegebenen leicht einsieht, lautet wie folgt:

Gibt es zu jedem Punkt x von X und zu jeder Umgebung V von $y = f(x)$ in Y eine Umgebung U von x in X, so dass das Bild von U in V liegt, so heisst f stetig.

Wie schon gesagt, heisst eine Abbildung topologisch, wenn sie ein-eindeutig (das heisst, jeder Punkt besitzt genau einen Bildpunkt und jeder Bildpunkt genau ein Urbild) und in beiden Richtungen stetig ist (das heisst sowohl der Übergang vom Urbild zum Bild wie derjenige vom Bild zum Urbild sind stetig). Aus letzterem folgt nach unserer ersten Definition der Stetigkeit, dass nicht nur das Urbild einer offenen Menge, sondern auch das Bild einer offenen Menge offen ist. Daraus ergibt sich weiter: Die Eigenschaften einer Menge eines topologischen Raumes, offen, abgeschlossen oder Umgebung eines Punktes zu sein, und die Eigenschaft eines Punktes, Häufungspunkt einer Menge zu sein, sind topologisch invariant.

Wir wollen nun vorderhand nicht weiter auf Grundbegriffe der Topologie eingehen, sondern von einer tiefer liegenden Problemstellung berichten, nämlich von der Fundierung des Dimensionsbegriffes. Man sah sich zu dieser veranlasst, nachdem die folgenden Entdeckungen gemacht wurden:

Sei S eine Strecke und Q ein Quadrat der euklidischen Ebene E^2, also zum Beispiel

S: Menge der Punkte $p(x, y)$, für die $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$, und

Q: Menge der Punkte $p(x, y)$, für die $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ gilt.

Cantor hat gezeigt, dass es *ein-eindeutige* Abbildungen von S *auf* Q gibt, das heisst, wobei jeder Punkt von Q Bildpunkt ist.

Peano hat gezeigt, dass sich S *stetig* (bezogen auf die durch die euklidische Metrik in E^2 gegebene Topologie) *auf* Q abbilden lässt.

Damit wurden gewisse Vorstellungen, die man mit dem zunächst nicht voll herausgearbeiteten Dimensionsbegriff verband, hinfällig. Von einem Dimensionsbegriff in einem topologischen Raum R verlangen wir, dass er jeder Teilmenge von R eine bestimmte Dimension zuweist und dass diese Dimension topologisch invariant ist. Erst 1913 ist es BROUWER gelungen, einen solchen Dimensionsbegriff zu fassen. Eine abgeschlossene *Dimensionstheorie* gibt es bis heute nur für spezielle topologische Räume, nämlich für *separable metrische* Räume. Ein topologischer Raum heisst separabel, wenn es eine abzählbare Menge von Punkten von R gibt, die in R dicht ist. (Beispielsweise ist E^2 separabel, denn die in E^2 dichte Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten ist abzählbar). Die Dimensionstheorie zeigt, dass der «n-dimensionale» euklidische Raum die Dimension n hat. Weitere Beispiele: Sowohl die Menge der Punkte von E^1 mit rationaler Abszisse, wie die der Punkte mit irrationaler Abszisse, haben die Dimension 0. Die Strecke S hat die Dimension 1, das Quadrat Q die Dimension 2, das heisst, obschon die oben angeführten Phänomene bestehen, sind S und Q nicht homöomorph.

Da wir für die Dimensionstheorie nicht auf die Metrisierbarkeit verzichten können, lässt sich die Frage aufwerfen, ob sich mengentheoretische Bedingungen für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes angeben lassen. URYSOHN hat gezeigt, dass dies tatsächlich möglich ist. Bevor wir solche Bedingungen angeben, müssen wir zwei weitere Grundbegriffe erklären.

Basis eines topologischen Raumes R. Ein Teilsystem B der offenen Mengen von R heisst eine Basis von R, wenn jede offene Menge von R Vereinigung von gewissen Mengen des Systems B ist. (Beispielsweise bilden in E^2 alle Umgebungen $U(p, \varrho)$ mit rationalem ϱ, deren Mittelpunkte p rationale Koodinaten besitzen, eine Basis von E^2. Diese Basis ist abzählbar.)

Ein topologischer Raum heisst *regulär*, wenn er die folgenden beiden sogenannten Trennungsaxiome erfüllt:

1. Von je zwei Punkten hat jeder eine Umgebung, welche den andern nicht enthält.

2. Für jede abgeschlossene Menge M und jeden Punkt p, der nicht in M enthalten ist, gibt es eine offene Menge N, die M enthält, und eine Umgebung U von p, so dass der Durchschnitt $N \cap U$ leer ist.

Es gilt nun der folgende *Metrisationssatz:*

Jeder reguläre topologische Raum, der eine abzählbare Basis besitzt, kann metrisiert werden.

Wir schliessen mit einigen Bemerkungen zur Literatur. Es zeigt sich heute in einigen Werken, zum Beispiel in denjenigen von N. BOURBAKI, die Tendenz, die Darstellung der Grundlagen der Topologie (und auch der anderen Gebiete der Mathematik) stark zu formalisieren. Ein solches Vorgehen ist für die Untersuchung der Struktur der Grundlagen berechtigt und auch notwendig. Daraus aber zu schliessen, dass eine solche Darstellung auch demjenigen dienen soll, der sich mit dem betreffenden Gebiet bekannt machen will, ist unseres Erachtens ein Irrtum. Für uns ist zum Beispiel die Topologie mehr als ihre Struktur. Wohl werden dem Leser die Grundlagen in möglichster Allgemeinheit und konsequentem Aufbau dargeboten, aber diese Grundlagen werden für den Leser zumeist nur formale Bedeutung haben, weil er der Ideen, welche zu diesen Grundlagen geführt haben, kaum teilhaftig wird. Und nur aus diesem Ideellen heraus kann schöpferisch an den Problemen der Mathematik weitergearbeitet werden.

Als ansprechende, wenig umfangreiche Einführungen sind die beiden folgenden Publikationen zu empfehlen, die auch weitere Literaturangaben enthalten:

1) R. H. BING: Elementary Point Set Topology. The American Mathematical Monthly, Volume 67, Number 7, Part II, 1960.

2) E. M. PATTERSON: Topology. Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.

JOHANNES M. EBERSOLD

Eine elementare Methode für Unmöglichkeitsbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Bei dem Versuch, für Anfangssemester in Vorlesungen über «Schulmathematik vom höheren Standpunkt» die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal möglichst elementar darzustellen, habe ich in der Literatur nur wenig Hilfe finden können. Eine elementare Methode für Unmöglichkeitsbeweise, die ich mir zurechtgelegt habe, mag deshalb auch für andere von Interesse sein, zumal sie durchaus auch Schülern zugänglich ist. Die Methode braucht nur einfachste Sätze über Polynome und vermeidet alle Mittel der Körpertheorie; sie scheint einheitlich viele alte und neue Unmöglichkeitsbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu erfassen, soweit sie nicht ihrer Natur nach transzendente Mittel erfordern (Kreisquadratur) oder Gleichungen höheren als 4. Grades (Kreisteilung). In der Literatur werden meist nur die klassischen Unmöglichkeitsbeweise behandelt: Winkeldrittelung, Würfelverdoppelung, reguläre n-Ecke [1], [2], [3], [5], [6], [10], [11]. Die Beweise setzen meist auch noch mehr Vorkenntnisse aus der Algebra voraus, als nötig wären. Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen finden sich in den zugänglichen Büchern nur wenige Beiträge, so in [7][1]). Da andererseits noch in neuerer Zeit Originalabhandlungen über spezielle Unmöglichkeitsbeweise bei Dreiecken erschienen sind (Dreieck aus den drei Winkelhalbierenden [8]; andere Sätze in [4] und [9]), mag es gerechtfertigt sein, eine Methode hier darzustellen, deren einzelne Teile zwar längst bekannt sind- die aber einfachere Beweise auch für schon bekannte Sätze erlaubt.

1. *Konstruktionen dritten und vierten Grades*

Vorausgesetzt wird der leicht zu beweisende Satz (z. B. [3], [5], [6], [10]), dass bei vorgegebenen Streckenlängen oder Punktkoordinaten genau diejenigen Punkte (Strecken) mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, deren Koordinaten (Massgrössen) aus den gegebenen Grössen durch endliche Anwendung der rationalen Operationen und der Operation des Quadratwurzelziehens hervorgehen. Vorausgesetzt wird ferner der Begriff des Körpers (aber kein Satz der Körpertheorie). Mit K_0 wird der Körper der rationalen Zahlen bezeichnet, mit K_1 ein Körper, der aus allen rationalen Ausdrücken in einer festen Quadratwurzel $\sqrt{d_1}$ mit rationalen Koeffizienten besteht (d_1 rational, aber kein Quadrat). Allgemein besteht der Körper K_n aus allen rationalen Ausdrücken (oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, allen gebrochen-linearen Ausdrücken) in $\sqrt{d_n}$ mit Koeffizienten aus K_{n-1}, wo d_{n-1}, aber nicht $\sqrt{d_{n-1}}$ aus K_{n-1}. Offenbar liegt jede Zahl, die aus der Zahl 1 mit Zirkel und Lineal konstru-

[1]) Auch in den IMUK-Bänden [1], [2] finden sich keine elementaren Beiträge zu unserem Aufgabenkreis.