Sur les nombres triangulaires qui sont sommes de deux nombres triangulaires

entstehen aus Quadraten durch normalaffine Abbildung, wenn die Affinitätsrichtung zu zwei Quadratseiten den Winkel $\pi/8$ bildet und für das Affinitätsverhältnis k gilt:

$$k \geqq \sqrt{4\sqrt{2}+1}.$$

Kombiniert man unsern Satz mit einem Ergebnis von BESICOVITCH [2], so erhält man eine – vermutlich noch schlechte – untere Schranke für das innere axiale Symmetriemass eines beliebigen Eibereiches.

Der vorliegende Beweis wurde im Wintersemester 1960/61 im mathematischen Seminar in Bern vorgetragen. In der Diskussion ergaben sich verschiedene Verbesserungsvorschläge, insbesondere durch Beiträge von Herrn H. HADWIGER, die hier berücksichtigt sind, und die ich auch an dieser Stelle bestens verdanken möchte.

W. NOHL, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] FARY und RÉDEI: *Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern.* Math. Ann. *122,* 205–220 (1950).

[2] BESICOVITCH, A. S.: *Measure of Asymmetry of Convex Curves I.* J. London Math. Soc. *23,* 237–240 (1949).

[3] BESICOVITCH, A. S.: *Measure of Asymmetry of Convex Curves II.* J. London Math. Soc. *26,* 81–93 (1951).

Sur les nombres triangulaires qui sont sommes de deux nombres triangulaires

Le but de cette note est de démontrer la proposition suivante:

Théorème. *Pour qu'un nombre triangulaire* $t_n = [n\,(n+1)]/2$ *soit une somme de deux nombres triangulaires* > 0, *il faut et il suffit que le nombre* $n^2 + (n+1)^2$ *soit composé.*

Démonstration. Dans ma note parue dans les Elemente der Mathematik *16* (1961), p. 27, j'ai démontré que pour qu'un nombre impair soit d'une seule façon somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il soit une puissance à l'exposant naturel d'un nombre premier de la forme $4\,k+1$.

Si le nombre t_n serait une somme de deux nombres triangulaires > 0, il existerait des nombres naturels x et $y \geqq x$ tels que $t_n = t_x + t_y$, d'où

$$(2\,n+1)^2 + 1 = (2\,x+1)^2 + (2\,y+1)^2\,,$$

ce qui donne $m = (n+1)^2 + n^2 = (x+y+1)^2 + (y-x)^2$.

Si m est un nombre premier, il n'est pas un carré et on a $y \neq x$. Les nombres $x+y+1$ et $y-x$ sont donc naturels et évidemment premiers entre eux (puisque m est un nombre premier) et on a $x+y+1-(y-x) = 2\,x+1 > 1$, d'où il résulte que m est de deux façons somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, contrairement à mon théorème cité plus haut. Le nombre m ne peut pas donc être premier et, comme on a évidemment $m > 1$, m est un nombre composé. La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Supposons maintenant que $m = (n+1)^2 + n^2$ est un nombre composé. Si m avait encore une autre décomposition en somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, soit $m = a^2 + b^2$, où a et $b \leqq a$ sont des nombres naturels tels que $a - b \neq 1$, donc $a - b > 1$ (puisque $a \neq b$, a et b étant premiers entre eux et m en tant qu'un nombre composé, étant > 2), on aurait

$$2\,m = (a+b)^2 + (a-b)^2 \quad \text{où} \quad a + b - (a-b) = 2\,b > 1\,,$$

et on a une décomposition du nombre $2\,m$ en une somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants autre que $2\,m = (2\,n+1)^2 + 1^2$.

Si $m = (n+1)^2 + n^2$ n'avait aucune autre décomposition en somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, alors, d'après mon théorème cité, on aurait $m = p^s$, où p est un nombre premier de la forme $4\,k+1$ et s est un nombre naturel $\geqq 2$ (puisque m est composé). Le nombre p est (d'après le même théorème) une somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants $p = a^2 + b^2$, où $a \geqq b$, donc $a > b$ (puisque p est impair). Si $s = 2$, on en trouve sans peine

$$2\,m = 2\,p^2 = (2\,ab + a^2 - b^2)^2 + (2\,ab - a^2 + b^2)^2\,.$$

On a ici $2\,a\,b + a^2 - b^2 - (2\,ab - a^2 + b^2) = 2\,(a^2 - b^2) > 1$. La décomposition du nombre $2\,m$ en somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants est donc une autre que $2\,m = (2\,n+1)^2 + 1^2$.

Soit maintenant $s > 2$ et distinguons deux cas.

1. s est un nombre impair, $s = 2\,h + 1$, où h est un nombre naturel. On a alors

$$2\,m = 2\,p^2 = 2\,p^{2h}\,p = [p^h\,(a+b)]^2 + [p^h\,(a-b)]^2\,,$$

ce qui est évidemment une autre décomposition du nombre $2\,m$ en une somme des carrés de deux nombres naturels non décroissants que la décomposition

$$2\,m = (2\,n+1)^2 + 1^2\,.$$

2. s est un nombre pair, $s = 2\,h + 2$, où h est un nombre naturel. En utilisant la décomposition trouvée plus haut, $2\,p^2 = c^2 + d^2$, on obtient la décomposition $2\,m = (p^h\,c)^2 + (p^h\,d)^2$ qui est évidemment autre que $2\,m = (2\,n+1)^2 + 1^2$.

Nous avons ainsi démontré que si m est un nombre composé, le nombre $2\,m$ a toujours, outre la décomposition $2\,m = (2\,n+1)^2 + 1^2$, encore une autre décomposition en une somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants, soit

$$2\,m = u^2 + v^2\,.$$

Or, m étant un nombre impair, les nombres u et v sont nécessairement impairs, $u = 2\,x + 1$, $v = 2\,y + 1$, où x et y sont des nombres naturels (puisque $u \neq 1$ et $v \neq 1$). On a donc l'égalité

$$(2\,n+1)^2 + 1 = (2\,x+1)^2 + (2\,y+1)^2$$

d'où il résulte toute de suite que $t_n = t_x + t_y$. Nous avons ainsi démontré que la condition de notre théorème est suffisante.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Une conséquence immédiate de notre théorème est que le problème s'il existe une infinité de nombres triangulaires qui ne sont pas sommes de deux nombres triangulaires >0 équivaut au problème s'il existe une infinité de nombres premiers qui sont sommes de carrés de deux nombres naturels consécutifs. Il résulte sans peine de l'hypothèse H_0 de M. A. Schinzel, exprimée dans les Acta Arithmetica IV (1958), p. 188, qu'il existe une infinité de tels nombres premiers. Pour $n \leqq 10$ on obtient les nombres premiers de la forme $n^2 + (n+1)^2$ seulement pour $n = 1, 2, 4, 5, 7$ et 9: ce sont les nombres 5, 13, 41, 61, 113, 181. W. Sierpiński (Varsovie)

Ungelöste Probleme

Nr. 43. Ein dem Unterzeichneten von A. J. H. M. van de Ven mitgeteiltes Problem lautet wie folgt: Gibt es in der euklidischen Ebene sechs nicht auf ein und demselben Kegelschnitt gelegene Punkte derart, dass alle sechs durch je fünf der Punkte bestimmten Kegelschnitte untereinander kongruent sind? – Prinzipiell lässt sich dieses Problem in endlich vielen Schritten auf algebraischem Wege entscheiden, die Rechnungen sind aber kaum zu übersehen. Dasselbe Problem für vier Punkte und Kreise führt auf die vollständige Lösung, die durch drei beliebige Punkte und das Orthozentrum des durch sie gebildeten Dreiecks gegeben ist.

J. J. Schäffer, Montevideo

Kleine Mitteilungen

Einige Bemerkungen zu einer Aufgabe von L. Carlitz

Die in einer Aufgabe von L. Carlitz [1] gestellte Frage nach der Bestimmung der Anzahl N der Lösungen der Kongruenz

$$(x^2-1)\,(x^2-2)\ldots\left(x^2-\frac{p-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod p$$

erfordert für die beiden Fälle $p \equiv 1 \pmod 4$ und $p \equiv 3 \pmod 4$ eine ganz verschiedenartige Behandlung. Für den ersten Fall ergibt sich ohne weiteres

$$N = \frac{p-1}{2}, \quad p \equiv 1(4)\,, \tag{1}$$

da es für $p = 4z+1$ zwischen 0 und $p/2$ gleich viele quadratische Reste und Nichtreste gibt. Für den Fall $p = 4z+3$ kann man die zuerst von Dirichlet bewiesenen Formeln für die Klassenzahl des quadratischen Körpers $R\,(\sqrt{-p})$ benutzen, da in ihnen der Überschuss der Anzahl der zwischen 0 und $p/2$ liegenden quadratischen Reste über die Anzahl der Nichtreste, also der Ausdruck $N-(p-1)/2$ auftritt [2]. Man erhält so die Formeln [3]

$$\begin{aligned} N &= \frac{p-1}{2} + 3\,h\,(-p)\,, \quad p \equiv 3(8)\,,\\ N &= \frac{p-1}{2} + h\,(-p)\,, \quad p \equiv 7(8)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Im folgenden wollen wir zeigen, dass sich für den Fall $p = 4z+3$ N auch unabhängig von der Klassenformel bestimmen lässt und zwar als mod p kleinster positiver Rest eines geschlossenen Ausdrucks, der im wesentlichen von einer gewissen Bernoullischen Zahl abhängt. Umgekehrt ergibt sich daraus eine interessante Kongruenz, der im Falle $p = 4z+3$ die Klassenzahl $h\,(-p)$ genügt.