Ein einfacher Beweis eines Satzes von H. Schaal über den Krümmungsmittelpunkt des scheinbaren Umrisses einer Fläche

Autor(en): **Vogler, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 4

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21915

Ein einfacher Beweis eines Satzes von H. SCHAAL über den Krümmungsmittelpunkt des scheinbaren Umrisses einer Fläche

In seiner Arbeit «*Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- oder Parallelprojektion*» hat H. SCHAAL vor allem den folgenden Satz abgeleitet und dabei vorwiegend analytische Hilfsmittel herangezogen ([1] S. 283, Satz 2):

Sind durch den Punkt P des wahren Umrisses (U) einer Fläche Φ zwei beliebige Kurven (C_1) und (C_2) gezogen, deren Tangenten in P konjugiert sind, dann ist in $\overline{P}$ (das ist die Projektion von P) der Krümmungsradius $\overline{R}$ des scheinbaren Umrisses $(\overline{U})$ von Φ gleich der algebraischen Summe der in $\overline{P}$ vorhandenen Krümmungsradien der Projektionen von (C_1) und (C_2).

In den vorliegenden Zeilen soll für den Fall der Parallelprojektion ein *neuer*, sehr durchsichtiger *Beweis* des Satzes geliefert werden, der sich auf bekannte Sätze und vorwiegend geometrische Überlegungen stützt.

1. Unterwirft man ein ebenes System Σ_2 innerhalb seiner Ebene einer einparametrigen Schar von Schiebungen, so vollführt es gegenüber dem ruhend gedachten System Σ_1 eine *krumme Schiebung*. Die Punkte P von Σ_2 durchlaufen vermöge dieser Bewegung kongruente Bahnen $l(P)$. Deshalb verhält sich eine krumme Schiebung in jedem Augenblick hinsichtlich ihrer Tangenten wie eine gewöhnliche Schiebung.

Wird eine beliebige Kurve k von Σ_2 einer krummen Schiebung unterworfen, so umhüllen ihre ∞^1 Lagen in Σ_1 eine Hüllbahn $h(k)$. Die mitgenommene Kurve k berührt ihre Hüllbahn in jenem Punkt, in dem die Tangente an k mit der Bahntangente übereinstimmt. Die Hüllbahn $h(k)$ ist demnach auch Hüllkurve der Bahnen $l(P)$ der Punkte von k und kann daher auch als Hüllbahn einer dieser Kurven $l(P)$ bei einer krummen Schiebung längs k erzeugt werden.

Um den Krümmungsmittelpunkt M_h der Hüllbahn $h(k)$ in einem ihrer Punkte U_t zu konstruieren, verwenden wir den nachfolgenden Satz der Kinematik:

Der Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahn $h(k)$ einer Kurve k ist auch Krümmungsmittelpunkt jener Bahnkurve $l(M)$, die der Krümmungsmittelpunkt M von k durchläuft.

(Wegen eines Beweises dieses Satzes sei auf [2], S. 50 verwiesen.) Im Falle einer krummen Schiebung längs l ist die Bahn des Krümmungsmittelpunktes M von k in U_t zu l kongruent. Daraus folgt: *Der Krümmungsradius R der Hüllbahn $h(k)$ einer Kurve k, die einer krummen Schiebung längs der Kurve l unterworfen wird, ergibt sich als algebraische Summe der Krümmungsradien der im betrachteten Punkt U_t von $h(k)$ einander berührenden Bahn- und Schiebkurve.*

2. In analoger Weise wie für ebene Systeme lässt sich auch im Raum eine krumme Schiebung längs einer Kurve l erklären. Eine beliebige einer solchen krummen Schiebung unterworfene Kurve k überstreicht im allgemeinen eine Fläche, die *Schiebfläche* genannt wird. Die Lagen der verschobenen Kurve k und die zu l kongruenten Bahnen der Punkte von k bilden auf der Schiebfläche ein konjugiertes Netz. Die beiden Kurvenscharen, die wir symbolisch mit $\{k\}$ und $\{l\}$ bezeichnen, sind gleichberechtigt. Die Schiebfläche Φ kann nämlich sowohl durch Verschiebung eines Exemplares k_1 aus $\{k\}$ längs eines Exemplares l_1 aus $\{l\}$ wie auch durch Verschiebung von l_1 längs k_1 erzeugt werden.

Eine der einfachsten Schiebflächen ist das *Paraboloid.* Es ist auf ∞^1 Arten Schiebfläche. Konjugierte Achsenschnitte des Paraboloids liefern zusammengehörige Schiebkurven.

Durch eine beliebige Parallelprojektion einer Schiebfläche gehen die beiden Scharen der Schiebkurven $\{k\}$ bzw. $\{l\}$ in zwei Scharen kongruenter Kurven $\{\bar{k}\}$ bzw. $\{\bar{l}\}$ der Bildebene über. Jede dieser Scharen kann aus einem ihrer Exemplare durch Verschiebung längs eines Exemplares der anderen Schar erzeugt werden. Der scheinbare Umriss einer Schiebfläche entsteht demnach als Hüllbahn $h(\bar{k})$ bzw. $h(\bar{l})$ bei diesen ebenen krummen Schiebungen. *Kennt man daher in einem Punkt $\bar{U}_t$ des scheinbaren Umrisses $(\bar{U})$ einer Schiebfläche die Krümmungsradien $\bar{R}_1$ bzw. $\bar{R}_2$, der $(\bar{U})$ in $\bar{U}_t$ berührenden Bilder der Schiebkurven, so ergibt sich der Krümmungsradius $\bar{R}$ des scheinbaren Umrisses als algebraische Summe von $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$.* Dieser Satz ist nur ein Spezialfall des eingangs zitierten, von H. SCHAAL gefundenen Ergebnisses.

3. Um das Ergebnis von H. SCHAAL vollständig zu beweisen, verwenden wir folgende Hilfssätze:

I. *Eine in der Umgebung des Punktes P mindestens zweimal stetig differenzierbare Fläche Φ*[1]) *kann hinsichtlich ihres Krümmungsverhaltens in P durch ihr oskulierendes Scheitelparaboloid Φ^* ersetzt werden.* Das bedeutet, eine Φ angehörende Kurve c oskuliert in P eine auf Φ^* liegende Kurve c^* im allgemeinen genau dann, wenn c und c^* dieselbe Schmiegebene haben[2]).

II. Wir betrachten eine Zentralprojektion aus einem Auge O auf eine Bildebene π und bezeichnen den wahren Umriss einer Fläche Φ mit (U) und deren scheinbaren Umriss mit $(\bar{U})$. *Die Projektionen von zwei auf Φ liegenden Kurven (C_1) und (C_2), die sich in einem Punkt P von (U) berühren, oskulieren sich in der auf $(\bar{U})$ liegenden Projektion $\bar{P}$ von P*[3]).

Beweis: Die Projektionskegel k_1 und k_2 von (C_1) und (C_2) berühren längs des P projizierenden Strahles $s = [OP]$ die Tangentialebene τ von Φ. Da für die gemeinsame Tangente t von (C_1) und (C_2) die Normalkrümmungen der Projektionskegel k_1 und k_2 nach einem Satz von MEUSNIER[4]) übereinstimmen, oskulieren sich k_1 und k_2 längs s; womit die gleiche Aussage für ihre Schnittkurven $(\bar{C}_1)$ und $(\bar{C}_2)$ mit der Bildebene π bewiesen ist.

Folgerungen aus I. und II.:

a) Wird der zur Zentralprojektion aus einem Auge O gehörende wahre Umriss (U) einer Fläche Φ von einer Flächenkurve c in einem Punkt P geschnitten und ist Φ^* das Φ in P oskulierende Scheitelparaboloid, so *oskuliert die Projektion $\bar{c}$ von c die Projektion $\bar{p}$ des c berührenden Normalschnittes p von Φ^*.*

b) Da eine Fläche Φ in jedem Punkt P mit ihren in P oskulierenden Scheitelparaboloid Φ^* die Paare konjugierter Tangenten gemeinsam hat, berührt der wahre Umriss (U) von Φ in jedem Punkt U den wahren Umriss (U^*) des Φ in U oskulierenden Scheitelparaboloids Φ^*_U, da ja diese gemeinsame Tangente von (U) und (U^*) zu dem

[1]) Diese Voraussetzung wird im folgenden stets gemacht.

[2]) Ausgenommen sind nur diejenigen Kurven auf Φ und Φ^*, deren Schmiegebene mit der Tangentialebene von Φ und Φ^* übereinstimmt.

[3]) Dieser Satz ist identisch mit Satz 1 aus [1], S. 280.

[4]) Satz über die Meusnier-Kugel, vergleiche [3], § 26, Formel (3).

durch U gehenden Sehstrahl konjugiert ist. Aus a) folgt nun, dass *sich die scheinbaren Umrisse* $(\bar{U})$ *bzw.* $(\bar{U}^*)$ *von* Φ *bzw.* Φ_U^* *in der Projektion* $\bar{U}$ *von* U *oskulieren.*

Betrachten wir nun eine beliebige Fläche Φ; es sei (U) ihr wahrer Umriss bei einer Parallelprojektion aus dem Fernpunkt O_∞ und $(\bar{U})$ der scheinbare Umriss. Sind (C_1) und (C_2) zwei auf Φ liegende Kurven, die (U) in einem seiner Punkte U nach konjugierten Richtungen durchsetzen, so sind die (C_1) bzw. (C_2) berührenden Normalschnitte des Φ in U oskulierenden Scheitelparaboloids Φ_U^* zwei Parabeln p_1 bzw. p_2, die durch eine krumme Schiebung aneinander die Fläche Φ_U^* erzeugen. Nach a) oskulieren sich die Projektionen von (C_1) und p_1 bzw. von (C_2) und p_2 im Riss $\bar{U}$ von U. Nach *b*) oskulieren sich die scheinbaren Umrisse von Φ und Φ_U^* in U. Da für Schiebflächen und ihre Schiebkurven der Satz von H. SCHAAL in diesen Zeilen bereits bewiesen wurde, ist durch die vorangehenden Betrachtungen dieser Satz neuerdings, und zwar auf einfache, anschauliche Weise abgeleitet.

Wegen einer Erweiterung der Gültigkeit des Satzes auf den Fall der Zentralprojektion sei auf die Arbeit von H. SCHAAL [1], S. 286 verwiesen. H. VOGLER, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. SCHAAL, *Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- und Parallelprojektion.* Sitzungsber. der Bayr. Akad. Wiss., math.-nat.Kl., 17 aus 1960, S. 277–310.
[2] W. BLASCHKE – H. R. MÜLLER, *Ebene Kinematik* (Verlag von R. Oldenburg, München 1956).
[3] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer, Wien 1957).

Über die Auflösung von Gleichungssystemen mit einer «Curta»

In einem Aufsatz in den Elementen bemerkt JÄGER[1]), der Gaußsche Algorithmus erschwere das Rechnen mit Tischrechenmaschinen, weil Divisionen vorkämen. Wir wollen hier zeigen, dass mit der «Curta» diese Erschwerung nicht vorliegt, so dass man mit dieser Maschine den Gaußschen Algorithmus bequem durchführen und seine Vorteile mit der Annehmlichkeit des Maschinenrechnens verbinden kann.

Es sei das lineare System:

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad \begin{array}{l} k = 1 \text{ bis } M \\ i = 1 \text{ bis } N \end{array} \qquad M \geqslant N$$

gegeben. x_1 bis x_N seien die gesuchten Unbekannten, x_{N+1} bis x_M und y_1 bis y_N seien bekannte Grössen. Man kann dieses System folgendermassen in Matrixform schreiben:

$$\begin{array}{cc|ccccc|} & & x_1 & \dots & x_m & \dots & x_M \\ \hline y_1 & = & a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nM} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_N & = & a_{N1} & \dots & a_{Nm} & \dots & a_{NM} \\ \hline \end{array}$$

[1]) B. JÄGER, *Ein Reduktionsverfahren für Determinanten und Gleichungssysteme.* Elemente der Math. *16*, 130ff. (1961).