Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 4

PDF erstellt am: **10.08.2024**

gelten, wobei $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k + q \geq 0$ der von einer Stützhyperebene von A in Q berandete Halbraum ist, der keinen inneren Punkt mit A gemeinsam hat. Es seien nun $l \leq k$ Richtungen $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ $(i = 1, \ldots, l)$ im Raum gegeben, aus denen wir die Oberfläche fotografieren wollen. Offenbar hat die Matrix (a_{ij}) einen Rang $r \leq k$, und also hat bei passender Umordnung der Reihen das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, p_j = -\,\delta_{kr} \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{2}$$

eine Lösung $(p_1, p_2, \ldots, p_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, so dass der (die) in der angegebenen Weise von $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ bestimmte Punkt(e) Q nicht vollsichtbar ist (sind).»

Ein Beweis des rechtsstehenden Teils der Ungleichung, wonach also 2^k Blickpunkte jedenfalls ausreichen, fehlt unseres Wissens noch. H. HADWIGER

Zum Problem Nr. 43

Mit Brief vom 7. Juni 1962 teilt uns Herr J. J. SEIDEL, Eindhoven, mit, dass das Problem Nr. 43 von Herrn J. VAN VOLLENHOVEN, Technische Hochschule Eindhoven, im Sommer 1960 für die Ellipse im negativen Sinne entschieden wurde. Herr SEIDEL hat an der Geometrie-Tagung in Oberwolfach im Oktober 1960 in einem Vortrag «Die Kongruenzordnung von Kegelschnitten» über diese Lösung berichtet. Eine Publikation liegt noch nicht vor. Die Redaktion

Corrigendum

Comme l'a remarqué M. J. S. SELFRIDGE dans Mathematical Reviews *22* (1961), page 135, la démonstration (due à M. A. SCHINZEL) qui se trouve à la page 74 du vol. XV des Elemente der Mathematik, 1960, a une lacune. Pour la combler il suffit de supposer que $k > P$. En effet, alors il résulte de la formule $(k \cdot 2^n + 1, P) > 1$ que $k \cdot 2^n + 1$ est un nombre composé.

Il est aussi à remarquer que la démonstration de M. P. ERDÖS de son théorème 3 (cité dans la note des Elemente) qu'il existe une progression arithmétique croissante de nombres impairs dont aucun n'est pas de la forme $2^k + p$, où p est un nombre premier, démonstration qui se trouve à la page 119 de Summa Brasiliensis Mathematicae 1950 (vol. II) doit être complétée (d'après une remarque de M. A. SCHINZEL) par l'adjonction aux six congruences envisagées par M. ERDÖS encore de la congruence $x \equiv 0 \pmod{31}$. W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Kleine Mitteilungen

Bemerkenswerte Kongruenzeigenschaften von Reziprokensummen

Aus der von GLAISHER stammenden und von L. CARLITZ in den «Elementen», Bd. 14, S. 11 als Formel (1) zitierten Beziehung ergibt sich in der Spezialisierung für $n = 2$, dass stets

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 - \frac{4}{3} p^3 B_{p-3} \quad (\text{mod. } p^4)$$

gilt, wobei B_{p-3} die betreffende Bernoullische Zahl bedeutet. Daraus folgt sogleich, dass die Kongruenz

$$\binom{2p}{p} \equiv 2\ (p^3)$$

immer besteht, wenn p eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl ist, hingegen

$$\binom{2p}{p} \equiv 2\ (p^4)$$

dann und nur dann, wenn die $(p-3)$-te Bernoullische Zahl durch p teilbar ist.

Es werden im folgenden Eigenschaften von bestimmten Reziprokensummen gebracht, welche mit dieser Kongruenz zusammenhängen. Mit

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{(p-1)^2 + 1^2}{1^2\,(p-1)^2} + \frac{(p-2)^2 + 2^2}{2^2\,(p-2)^2} + \cdots + \frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{2}\right)^2}$$

und

$$B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = p\left[\frac{1}{1\,(p-1)} + \frac{1}{2\,(p-2)} + \cdots + \frac{1}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}}\right]$$

ist

$$p\,A + 2\,B = p\left[\frac{(p-1)^2 + 2\,(p-1) + 1^2}{1^2\,(p-1)^2} + \cdots\right]$$

$$= p^3\left[\frac{1}{1^2\,(p-1)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\frac{p+1}{2}\right)^2}\right].$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck der rechten Seite dieser Gleichung genügt nun für eine Primzahl $p > 5$ der Kongruenz

$$\frac{1}{1^2\,(p-1)^2} + \cdots \equiv \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^4} \equiv 1^4 + 2^4 + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^4$$

$$= p\,\frac{(p^2-1)\,(3\,p^2-7)}{480} \equiv 0(p)\,.$$

Somit ist

$$p\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2}\right] + 2\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right] \equiv 0\ (p^4)\,, \qquad p > 5\,.$$

Andrerseits ist

$$A - \frac{2\,B}{p} = \left(\frac{p-2}{1\,(p-1)}\right)^2 + \left(\frac{p-4}{2\,(p-2)}\right)^2 + \cdots$$

$$\equiv 4\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\right] \equiv 4\left[1^2 + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right] = p \cdot \frac{p^2-1}{6} \equiv 0(p)$$

und damit die bekannte Kongruenz

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 0(p^2)\,, \qquad p > 3$$

in einfacher Weise gezeigt. Sodann ist mit

$$\frac{1}{2}\left[\binom{2p}{p}-2\right][(p-1)!]^2=\left[\binom{2p-1}{p}-1\right][(p-1)!]^2$$
$$=[p+(p-1)][p+(p-2)]\cdots(p+1)(p-1)\cdots 2\cdot 1-[(p-1)!]^2$$
$$=[p^2-(p-1)^2]\cdot[p^2-(p-2)^2]\cdots[p^2-2^2][p^2-1^2]-[(p-1)!]^2\equiv p^4\cdot T$$
$$-p^2[(p-1)!]^2\cdot\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\right]\equiv 0(p^3)$$

die Kongruenz

$$\binom{2p}{p}\equiv 2\,(p^3)\,,\qquad p>3$$

auf recht einfache elementare Art bewiesen und die Verbindung mit obiger Formel von GLAISHER hergestellt. J. MAIER, Leibnitz, A. AIGNER, Graz

Aufgaben

Aufgabe 400. Auf den drei zueinander windschiefen Kanten AB, CG, HE eines Würfels wird je ein Punkt derart angenommen, dass die drei Teilverhältnisse

$$(AB\cdot P)=(CG\cdot Q)=(HE\cdot R)$$

gleich gross sind. Die Punkte P, Q, R bilden sodann bekanntlich ein gleichseitiges Dreieck. Zeichnet man von dieser Konfiguration einen Schrägriss mit dem Verzerrungswinkel $\varphi = 45°$ und dem Verkürzungsverhältnis $\lambda = 1/2$, so bilden die Schrägbilder P^s, Q^s, R^s, wenn man den Würfel in einfachste Lage zur Bildebene bringt, ein Dreieck, das sich nur wenig von einem gleichseitigen unterscheidet. Wie müssen φ und λ gewählt werden, damit der Schrägriss des Dreiecks P, Q, R tatsächlich ein gleichseitiges Dreieck wird? (vgl. Fig. 1, El. Math. *16*, 44 (1961)). R. BEREIS, Dresden

Solution: Posons $AB = AE = 1$, d'où $BC = \lambda$, et $AP = CQ = k$, d'où $HR = \lambda k$. Considérons le cas limite où $k = 1$. P, Q et R viennent respectivement en B, G et E. Si le triangle BGE doit être équilatéral, la condition $BG = EG$ entraîne immédiatement $\varphi = 45°$, et la condition $EB = BG$ se traduit par $2 = 1 + \lambda^2 + \lambda\sqrt{2}$, d'où $\lambda = (\pm\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$. Si, en partant de ces valeurs de φ et λ, on calcule les côtés du triangle PQR pour une valeur quelconque de k on trouve sans difficulté $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 = \overline{PR}^2 = 2k^2 - 2k + 2$.
CH. VUILLE, La Sagne

2. Lösung: Setzt man $(AB\cdot P) = \mu$ und $D, C, H, A = 0, 1, i, z$, so sollen die drei Punkte $P = z + \mu 1$, $Q = 1 + \mu i$, $R = i + \mu z$ der Zahlenebene ein gleichseitiges Dreieck bilden. Mit $\varepsilon = (-1 - i\sqrt{3})/2$, wo $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, wird somit verlangt, dass $P - Q = \varepsilon(Q - R)$. Von selbst ist dann $P - Q = \varepsilon^2(R - P)$. Das ergibt als Lösung

$$z = -(i+\varepsilon)\,\varepsilon = (1-\sqrt{3})\,(1+i)/2\,,$$

also $\varphi = 45°$ und $\lambda = -(1-\sqrt{3})/\sqrt{2} = 0{,}518$. I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten E. DOMKOWITSCH (Wien), G. GEISE (Dresden), K. GRÜN (Linz), W. JÄNICHEN (Berlin), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland), J. SCHOPP (Budapest), E. TEUFFEL (Stuttgart).

Aufgabe 401. Aus drei gegebenen, sich gegenseitig schneidenden Kugeln sollen durch eine Ebene drei sich gegenseitig berührende Kreise herausgeschnitten werden.
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Die drei gegebenen Kugeln K_1, K_2, K_3 und ebenso ihre gegenseitigen Schnittkreise $k_1 = K_2\cdot K_3$, $k_2 = K_3\cdot K_1$ und $k_3 = K_1\cdot K_2$ haben zwei Punkte gemeinsam, die auf der zur Verbindungsebene π der Mittelpunkte der Kugeln K_1, K_2, K_3 normal stehenden