Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 4

PDF erstellt am: **10.08.2024**

in einfacher Weise gezeigt. Sodann ist mit

$$\frac{1}{2}\left[\binom{2p}{p}-2\right][(p-1)!]^2=\left[\binom{2p-1}{p}-1\right][(p-1)!]^2$$

$$=[p+(p-1)][p+(p-2)]\cdots(p+1)(p-1)\cdots 2\cdot 1-[(p-1)!]^2$$

$$=[p^2-(p-1)^2]\cdot[p^2-(p-2)^2]\cdots[p^2-2^2][p^2-1^2]-[(p-1)!]^2\equiv p^4\cdot T$$

$$-p^2[(p-1)!]^2\cdot\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\right]\equiv 0(p^3)$$

die Kongruenz

$$\binom{2p}{p}\equiv 2\,(p^3)\,,\qquad p>3$$

auf recht einfache elementare Art bewiesen und die Verbindung mit obiger Formel von GLAISHER hergestellt. J. MAIER, Leibnitz, A. AIGNER, Graz

Aufgaben

Aufgabe 400. Auf den drei zueinander windschiefen Kanten AB, CG, HE eines Würfels wird je ein Punkt derart angenommen, dass die drei Teilverhältnisse

$$(AB\cdot P)=(CG\cdot Q)=(HE\cdot R)$$

gleich gross sind. Die Punkte P, Q, R bilden sodann bekanntlich ein gleichseitiges Dreieck. Zeichnet man von dieser Konfiguration einen Schrägriss mit dem Verzerrungswinkel $\varphi = 45°$ und dem Verkürzungsverhältnis $\lambda = 1/2$, so bilden die Schrägbilder P^s, Q^s, R^s, wenn man den Würfel in einfachste Lage zur Bildebene bringt, ein Dreieck, das sich nur wenig von einem gleichseitigen unterscheidet. Wie müssen φ und λ gewählt werden, damit der Schrägriss des Dreiecks P, Q, R tatsächlich ein gleichseitiges Dreieck wird? (vgl. Fig. 1, El. Math. *16*, 44 (1961)). R. BEREIS, Dresden

Solution: Posons $AB = AE = 1$, d'où $BC = \lambda$, et $AP = CQ = k$, d'où $HR = \lambda k$. Considérons le cas limite où $k = 1$. P, Q et R viennent respectivement en B, G et E. Si le triangle BGE doit être équilatéral, la condition $BG = EG$ entraîne immédiatement $\varphi = 45°$, et la condition $EB = BG$ se traduit par $2 = 1 + \lambda^2 + \lambda\sqrt{2}$, d'où $\lambda = (\pm\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$. Si, en partant de ces valeurs de φ et λ, on calcule les côtés du triangle PQR pour une valeur quelconque de k on trouve sans difficulté $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 = \overline{PR}^2 = 2k^2 - 2k + 2$.

CH. VUILLE, La Sagne

2. Lösung: Setzt man $(AB\cdot P) = \mu$ und $D, C, H, A = 0, 1, i, z$, so sollen die drei Punkte $P = z + \mu\, 1$, $Q = 1 + \mu\, i$, $R = i + \mu\, z$ der Zahlenebene ein gleichseitiges Dreieck bilden. Mit $\varepsilon = (-1 - i\sqrt{3})/2$, wo $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, wird somit verlangt, dass $P - Q = \varepsilon(Q - R)$. Von selbst ist dann $P - Q = \varepsilon^2(R - P)$. Das ergibt als Lösung

$$z = -(i+\varepsilon)\,\varepsilon = (1-\sqrt{3})\,(1+i)/2\,,$$

also $\varphi = 45°$ und $\lambda = -(1-\sqrt{3})/\sqrt{2} = 0{,}518$. I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten E. DOMKOWITSCH (Wien), G. GEISE (Dresden), K. GRÜN (Linz), W. JÄNICHEN (Berlin), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland), J. SCHOPP (Budapest), E. TEUFFEL (Stuttgart).

Aufgabe 401. Aus drei gegebenen, sich gegenseitig schneidenden Kugeln sollen durch eine Ebene drei sich gegenseitig berührende Kreise herausgeschnitten werden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Die drei gegebenen Kugeln K_1, K_2, K_3 und ebenso ihre gegenseitigen Schnittkreise $k_1 = K_2\cdot K_3$, $k_2 = K_3\cdot K_1$ und $k_3 = K_1\cdot K_2$ haben zwei Punkte gemeinsam, die auf der zur Verbindungsebene π der Mittelpunkte der Kugeln K_1, K_2, K_3 normal stehenden und durch das Potenzzentrum S der in π liegenden Grosskreise der gegebenen Kugeln gehenden Geraden liegen. Soll eine Ebene zwei der gegebenen Kugeln, etwa K_2 und K_3 nach zwei einander berührenden Kreisen schneiden, muss sie den Schnittkreis k_1 dieser Kugeln berühren. Damit diese Ebene auch die Kugeln K_3 und K_1 nach zwei einander berührenden Kreisen schneidet, muss sie auch den Kreis k_2 berühren. Alle Ebenen, welche die beiden einander schneidenden Kreise k_1 und k_2 berühren, umhüllen zwei Kegel, deren Scheitel S_3 und S_3' in π liegen und sich als Schnittpunkt der Kegelerzeugenden $P_1\,P_2$ und $P_1'\,P_2'$ beziehungsweise $P_1\,P_2'$ und $P_1'\,P_2$ ergeben. Analog erhält man für die Kreise k_2 und k_3 die Kegelscheitel S_1 und S_1' und für die Kreise k_3 und k_1 die Kegelscheitel S_2 und S_2'. Wegen der perspektivkollinearen Lage der Dreiecke $P_1\,P_2\,P_3$ und $P_1'\,P_2'\,P_3'$ mit dem Kollineationszentrum S liegen die Scheitel S_1, S_2, S_3 auf einer Geraden s. Die zwei durch s an die drei Kegel gelegten Tangentialebenen schneiden die gegebenen Kugeln in drei einander berührenden Kreisen. Auf analoge Weise findet man, dass auch die Punktetripel S_1, S_2', S_3' und S_1', S_2, S_3' sowie S_1', S_2', S_3 jeweils auf einer Geraden liegen müssen. Insgesamt ergeben sich für drei einander reell schneidende Kugeln zwei reelle und drei Paare von konjugiert-komplexen Lösungen. K. GRÜN, Linz

Haben die drei Kugeln mehr als zwei gemeinsame Punkte, dann gehören sie zu einem Büschel und jede der ∞^2 Ebenen, welche dessen Grundkreis berühren, stellt eine Lösung dar. Besitzen die Kugeln genau einen gemeinsamen Punkt, so gehören die Tangentialebenen in diesem Punkt zu einem Büschel und jede der ∞^1 Ebenen durch dessen Achse ergibt eine Lösung.

Weitere Lösungen sandten J. BASILE (Brüssel), W. JÄNICHEN (Berlin), R. KUTSMICHEL (Hanau/Deutschland), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), I. PAASCHE (München), J. SCHOPP (Budapest).

Aufgabe 402. Es ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{\theta_n(x)\,x^n}{n}\,, \quad 0 \leqq x \leqq 1\,,$$

wobei $0 < \theta_n(x) < 1$. Man beweise, dass bei festem x die Folge $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$, ... monoton fallend ist. W. JÄNICHEN, Berlin

Lösung: Bekanntlich ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\,\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\int\limits_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \quad (x > -1)\,,$$

also

$$\theta_n(x) = \frac{n}{x^n}\int\limits_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt = \int\limits_0^1 \frac{n\,s^{n-1}}{1+s\,x}\,ds \quad (0 \neq x > -1)\,,$$

dabei wurde das Integral durch die Substitution $t = s\,x$ umgeformt. Dadurch ist nun $\theta_n(x)$ für jedes reelle $n \geqq 1$ (und $0 \neq x > -1$) definiert. Es ist

$$\theta' = \frac{d}{dn}\,\theta_n(x) = \int\limits_0^1 \frac{s^{n-1}\,(1+n\ln s)}{1+s\,x}\,ds = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-nr}\,(1-n\,r)}{1+x\,e^{-r}}\,dr\,,$$

dabei wurde das letzte Integral durch die Substitution $s = e^{-r}$ gewonnen und die Differentiation unter dem Integral ist offenbar erlaubt. Das letzte Integral formen wir durch partielle Integration um, indem wir den Zähler gleich u' und den Nenner gleich $1/v$ setzen. Das ergibt

$$\theta' = r\,e^{-nr}\cdot\frac{1}{1+x\,e^{-r}}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty r\,e^{-nr}\cdot\frac{x\,e^{-r}}{(1+x\,e^{-r})^2}\,dr =$$

$$-\,x\int\limits_0^\infty \frac{r\,e^{-(n+1)r}}{(1+x\,e^{-r})^2}\,dr \lesseqgtr 0 \text{ für } x \gtreqless 0\,.$$

Demnach ist $\theta_n(x)$ bei festem $x > 0$ eine monoton fallende und bei $-1 < x < 0$ eine monoton wachsende Funktion von n.

Bemerkung: Die Angabe $0 < \theta_n(x) < 1$ für $0 \leqq x \leqq 1$ in der Aufgabenstellung ist überflüssig.

E. TEUFFEL, Stuttgart

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland).

Aufgabe 403. Démontrer que si n, n_1 et n_2 sont des entiers positifs, $n \mid n_1 n_2$ et aucun des nombres n_1 et n_2 n'est divisible par n, alors

$$d = \frac{n_1}{\left(n_1, \frac{n_1 n_2}{n}\right)}$$

est un diviseur de n, tel que $1 < d < n$.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Die drei Voraussetzungen $n \mid n_1 n_2$, $n \nmid n_1$, $n \nmid n_2$ sind äquivalent den Gleichungen $n = AB$, $n_1 = AC$, $n_2 = BD$ nebst $B \nmid C$, $A \nmid D$. Behauptet wird dann

$$1 < d = \frac{AC}{(AC, CD)} = \frac{A}{(A, D)} < AB \text{ und } \frac{A}{(A, D)} \,\Big|\, AB .$$

Letzteres ist trivial, und ersteres wegen $A > (A, D) \geqq 1$ und $B > 1$ richtig. Die Behauptung $1 < d < n$ von SIERPIŃSKI lässt sich hiernach verschärfen zu

$$1 < d \leqq (n, n_1) < n, \text{ das ist } 1 < \frac{A}{(A, D)} \leqq A(B, C) < AB .$$

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), B. BOLLOBÁS (Budapest), L. CARLITZ (Duke University, Durham/USA), W. JÄNICHEN (Berlin), E. KRÄTZEL (Jena), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. TEUFFEL (Stuttgart).

Aufgabe 404. Démontrer que si

$$n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

où a, b, c, d sont des entiers positifs, tels que $a \geqq b$, $c \geqq d$, $a > c$, $(a, b) = (c, d) = 1$, alors

$$D = \frac{a c + b d}{(a c + b d, a b + c d)}$$

est un diviseur de n tel que $1 < D < n$.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Die Voraussetzungen $(a, b) = (c, d) = 1$ und $a \geqq b$ werden nicht benützt. Alle Buchstaben bedeuten natürliche Zahlen. Es ist

$$n^2 = (a c + b d)^2 + (a d - b c)^2 = (a c - b d)^2 + (a d + b c)^2 \tag{1}$$

und

$$n (a b + c d) = (a c + b d)(a d + b c) . \tag{2}$$

Aus (2) ergibt sich

$$\frac{n}{a c + b d} = \frac{a d + b c}{a b + c d} = \frac{r}{s} \text{ mit } (r, s) = 1 ,$$

also

$$n = x r, \quad a c + b d = x s, \quad a d + b c = y r, \quad a b + c d = y s . \tag{3}$$

Demnach ist

$$D = \frac{a c + b d}{(a c + b d, a b + c d)} = \frac{x s}{(x s, y s)} = \frac{x}{(x, y)}$$

ein Teiler von x, also erst recht $D \mid n$, $1 \leqq D \leqq n$. Es bleibt zu zeigen, dass $D \neq 1$ und $D \neq n$. 1) Wäre $D = 1$, so wäre $(x, y) = x$, also $y = k x$ und man hätte nach (3)

$$a d + b c = k x r = k n , \quad a b + c d = k x s = k (a c + b d) . \tag{4}$$

Aus (1) ergibt sich mit (4) $n^2 = (a\,c - b\,d)^2 + k^2\,n^2$, also $k = 1$ und $a/d = b/c$. (4) ergibt nun $a\,b + c\,d = a\,c + b\,d$ oder $(a - d)\,(b - c) = 0$, so dass wegen $a/d = b/c$ $a = d$ und $b = c$ sein muss. Dann ist aber $d = a > c$ gegen die Voraussetzung $d \leqq c$. 2) Wäre $D = n$, so wäre $x/(x, y) = x\,r$, also $(x, y) = r = 1$, $n = x$, und man hätte nach (3)

$$a\,c + b\,d = n\,s\,, \quad a\,b + c\,d = (a\,d + b\,c)\,s\,. \tag{5}$$

Damit ergibt sich aus (1) $n^2 = n^2\,s^2 + (a\,d - b\,c)^2$, also $s = 1$ und $a/c = b/d$. Dann ist aber nach (5) $a\,b + c\,d = a\,d + b\,c$, das heisst $(a - c)\,(b - d) = 0$, so dass wegen $a/c = b/d$ $a = c$ und $b = d$ sein muss gegen die Voraussetzung $a > c$. Damit ist alles bewiesen.

E. Teuffel, Stuttgart

Die meisten Löser benützten sämtliche Voraussetzungen der Aufgabe sowie das Resultat von Aufgabe Nr. 403. Weitere Lösungen sandten L. Bernstein (Tel-Aviv), C. Bindschedler (Küsnacht), L. Carlitz (Duke University, Durham/USA), W. Jänichen (Berlin), E. Krätzel (Jena), H. Meili (Winterthur), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen/Deutschland).

Aufgabe 405. Gegeben sind eine Fläche zweiter Ordnung F und n Punkte P_i ausserhalb derselben. Gesucht ist ein (im allgemeinen windschiefes) n-Seit, dessen Seiten der Reihe nach durch die Punkte P_i gehen und die Fläche F berühren.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Die Seite s_i des n-Seits ist Erzeugende des Tangentialkegels an F aus P_i. Eine Ecke liegt also im Schnitt von zwei aufeinander folgenden Kegeln. Dieser zerfällt aber in zwei Kegelschnitte. [Bedeutet $(x \mid x) = 0$ die Gleichung der Fläche F, $(x \mid y) = 0$ die der Polarebene des Punktes (y), so ist

$$K_y \equiv (x \mid y)^2 - (x \mid x) \cdot (y \mid y) = 0$$

die Gleichung des Tangentialkegels aus (y). Der Schnitt der zwei Tangentialkegel $K_y = 0$ und $K_z = 0$ liegt aber auch auf der Fläche $(z \mid z)\,K_y - (y \mid y)\,K_z = 0$, die das Ebenenpaar $\sqrt{(z \mid z)} \cdot (x \mid y) \pm \sqrt{(y \mid y)} \cdot (x \mid z) = 0$ darstellt.]

Wählt man nun von jedem der n Kegelschnittpaare, in denen sich benachbarte Tangentialkegel schneiden, einen bestimmten aus (was auf 2^n Arten geschehen kann), etwa $C_{1,2}$, $C_{2,3}$, ..., $C_{n,1}$, so erhält man auf $C_{1,2}$ auf folgende Weise eine Projektivität: Aus einem beliebigen Punkt X_1 auf $C_{1,2}$ ziehe man den Polygonzug $X_1\,P_2\,X_2\,P_3 \ldots X_n\,P_1\,\overline{X}_1$, wo X_i auf $C_{i,i+1}$ liegt (zyklische Indexfolge). Ist $X_1 = \overline{X}_1$ ein Doppelpunkt dieser Projektivität, so stellt der nun geschlossene Polygonzug eine Lösung dar (2^{n+1} Lösungen).

Liegen die Punkte P_i in einer Ebene ε, so sind 2^n Lösungen trivial. Sie werden gebildet von je einer in ε liegenden Tangente an F durch P_i. Die übrigen 2^n Lösungen sind windschief. Im Fall $n = 3$ sind die 8 nichtebenen «Dreiseite» ausgeartet (3 Strahlen durch einen Punkt), sie werden gebildet von den Verbindungsgeraden der Punkte P_1, P_2, P_3 mit einem der 8 gemeinsamen Punkte der drei Berührungskegel.

Neue Aufgaben

Aufgabe 432. Durch Rotieren der Bernoullischen Lemniskate um die Mittelsenkrechte ihrer Brennpunkte entsteht eine Fläche. Man bestimme ihre nichttrivialen Kreisschnitte.

G. Unger, Dornach

Aufgabe 433. Entsprechende Strahlbüschel einer ebenen Kollineation sind projektiv und erzeugen bekanntlich einen Kegelschnitt, der alle Fixpunkte der Kollineation enthält. Wie verteilen sich die Scheitel solcher Büschelpaare, die Kegelschnitte einer bestimmten (etwa durch die numerische Exzentrizität gekennzeichneten) Gestalt erzeugen, insbesondere Parabeln und gleichseitige Hyperbeln?

W. Wunderlich, Wien

Aufgabe 434. Man beweise folgende Umkehrformel: f und g sind zahlentheoretische Funktionen (das heisst Abbildungen der Menge der nicht negativen ganzen Zahlen in eine additive abelsche Gruppe, zum Beispiel die reellen oder komplexen Zahlen). Dann sind die beiden Aussagen

$$g(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} f(k) \tag{1}$$

und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{x} (-1)^{x+k} \binom{x}{k} g(k) \tag{2}$$

gleichbedeutend.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 435. Find the general polynomial solution of

$$\Phi\left((x+y)^2\right) \equiv \Phi(x^2) + \Phi(y^2) + 2\,x\,y\,(x^{p-1} - C)\,(y^{p-1} - C) \pmod{p},$$

where p is a prime > 2 and C is independent of x.

L. CARLITZ, Duke University, Durham N.C. USA.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a wird auf einer Gerade abgewälzt, bis die ursprüngliche Grundlinie wieder auf der Gerade liegt. Berechne die Fläche zwischen der Bahn des Mittelpunktes dieser Grundlinie und der Gerade.

▶ $f = a^2\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

2. Zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 berühren sich von aussen. Für die Radien ϱ_1 und ϱ_2 derjenigen Kreise, die die gegebenen Kreise und eine ihrer gemeinsamen äusseren Tangente berühren, gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho_{1,2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \pm \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

3. In jedem Dreieck mit den Seiten a, b, c und der Fläche f gilt für den Umkreisradius

$$r \leqq \frac{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}{32\,f},$$

mit Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck.

▶ Aus $a + b \geqq 2\sqrt{a\,b}$ folgt

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a) \geqq 8\,a\,b\,c = 32\,r\,f.$$

4. Gegeben sind ein Kreis k in der Grundrissebene: $Z\ (8;\ 6;\ 0)$, $r = 4$, und eine Gerade t: $A\ (0;\ 11;\ 12)$, $B\ (17;\ 5;\ 0)$. Eine Kugel enthält k und besitzt die Tangente t. Zeichne die Risse derjenigen Lösung, die ganz auf dem Blatte Platz hat.

5. Vom Punkt $S\ (7;\ 6;\ 3)$ aus gehen drei Strahlen, die ein rechtwinkliges Dreibein bilden. Man kennt ihre Grundrisse: $S\,A\ (11;\ 0;\ ?)$, $S\,B\ (15;\ 15;\ ?)$, $S\,C\ (15;\ 3;\ ?)$. Zeichne den Würfel, von dem drei Kanten in den drei Strahlen liegen, und von dem die Ecke auf $S\,A$ die erste Kote 0 hat.