

# Über gewogene Mittelwerte, insbesondere gewogene geometrische Mittel

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 6

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21920>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. HAHN: *Bericht über Differential-Differenzgleichungen mit festen und veränderlichen Spannen*. Jber. DMV 57 (1954), 55–84. – Speziell auf den Gleichungstyp (3) zugeschnitten ist die eingehende Untersuchung von F. SCHÜRER: *Über die Funktional-Differentialgleichung  $f'(x+1) = a f(x)$* . Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. 64 (1912), 167–236. Vgl. auch Bd. 65 (1913), 239–246, 247–263.
- [2] J. BINET: *Remarque sur une courbe qui est sa propre développée etc.* J. math. pur. appl. 6 (1841), 61–64. G. SCHEFFERS: *Einführung in die Theorie der Kurven* (Leipzig 1901), S. 71.
- [3] M. ALLÉ: *Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 113 (1904), 53–70.
- [4] W. WUNDERLICH: *Sur une certaine généralisation des cycloïdes*. Simon Stevin (im Druck).
- [5] V. A. PUISEUX: *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes*. J. math. pur. appl. 9 (1844), 377–399. – In dieser und anderen Abhandlungen wird eine ebene Kurve durch die Abhängigkeit des Krümmungshalbmessers  $\rho$  vom Tangentenwinkel  $\tau$  dargestellt. Die einschlägigen Fragen können jedoch meist einfacher mit Hilfe der Stützfunktion  $h(\tau)$  behandelt werden, die überdies eine Konstruktion der Kurve ohne Integration gestattet.
- [6] C. A. CROMMELIN, W. VAN DER WOUDE: *Quelle courbe est égale à sa développée? Un cas simple*. Simon Stevin 30 (1953), 17–24.

## Über gewogene Mittelwerte, insbesondere gewogene geometrische Mittel

Für die einfache Quadratfunktion

$$f(x) = c x^2, \quad c = \text{const.} \quad (1)$$

gilt die einfache, aber wenig bekannte Beziehung

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) &= \frac{1}{4} (f(x_i) + 2 (f(x_i) f(x_k))^{1/2} + f(x_k)) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{f(x_i) + f(x_k)}{2} + \sqrt{f(x_i) f(x_k)} \right), \quad x_i \neq x_k. \end{aligned} \quad (II)$$

das heisst dem arithmetischen Mittel zweier Argumente entspricht der Durchschnitt zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der beiden bezüglichen Funktionswerte.

Weiter findet man für die einfache Potenzfunktion  $n$ . Grades

$$f(x) = c x^n, \quad c = \text{const.} \quad (III)$$

die Beziehung

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_0^n \binom{n}{t} (f^{n-t}(x_i) f^t(x_k))^{1/n}, \quad x_i \neq x_k. \quad (IV)$$

Der zweite Faktor hinter dem Summenzeichen ist ein gewogenes geometrisches Mittel. Setzen wir für  $f(x_i) = a$ ,  $f(x_k) = b$ , so haben wir für das gewogene geometrische Mittel die Gestalt

$$g = (a^{n-t} b^t)^{1/n}, \quad n \geq t \geq 0. \quad (V)$$

Für  $t = 0$  ist offenbar  $g = a$ , für  $t = n$  ist  $g = b$ , und für  $t = n/2$  haben wir  $g = \sqrt{a b}$ , das heisst das gewöhnliche geometrische Mittel. Im Bereiche der Mittelwertbildung ist notabene bei Wurzeln immer nur der positive Wert in Betracht zu ziehen.

Vorerst sei auf eine interessante Anwendungsmöglichkeit der gewogenen geometrischen Mittelwerte in der Stereometrie hingewiesen. Es seien zwei Würfel gegeben mit den Kantenlängen  $a$  und  $b$ . Nun wird ein mittlerer Würfel gebildet, dessen Kantenlänge das arithmetische Mittel  $(a + b)/2$  ist, und man fragt, wie die Volumen  $V_1$  und  $V_2$  der ersten beiden Würfel zu mitteln sind, damit das richtige Volumen  $V_3$  des mittleren Würfels erhalten wird. Man hat offenbar

$$\begin{aligned} V_3 &= \left(\frac{1}{2}(a + b)\right)^3 = \frac{1}{2^3}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \\ &= \frac{1}{2^3}V_1 + 3(V_1^2V_2)^{1/3} + 3(V_1V_2^2)^{1/3} + V_2 = \frac{1}{2^3} \sum_t^3 \binom{3}{t} (V_1^{3-t}V_2^t)^{1/3}. \end{aligned} \quad \text{(VI)}$$

Es ist hiernach ohne weiteres evident, dass wenn  $V_1$  und  $V_2$  die Volumen zweier  $n$ -dimensionaler Würfel mit den Kantenlängen  $a$  und  $b$  sind, sich dann das Volumen  $V_3$  des  $n$ -dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge  $(a + b)/2$  mit Hilfe gewogener geometrischer Mittelwerte aus den Volumen  $V_1$  und  $V_2$  ergibt als

$$V_3 = \frac{1}{2^n} \sum_t^n \binom{n}{t} (V_1^{n-t}V_2^t)^{1/n}. \quad \text{(VII)}$$

Es entspricht also dem arithmetischen Mittel der Argumente (Kanten) ein sich in binomialer Entwicklung ergebendes Aggregat von gewogenen geometrischen Mitteln der bezüglichen Funktionen (Volumen).

Aus (III) und (IV) ist jedoch zu ersehen, dass Beziehung (VII) nicht nur für Würfel sondern für ähnliche Körper überhaupt gilt. Wir nennen zwei Körper ähnlich, wenn alle einander entsprechenden linearen Elemente (Kanten, Durchmesser, Punktabstände usw.) in konstanter Proportion stehen. Dann lässt sich das Volumen  $V_1$  in Funktion eines linearen Elementes ausdrücken in der Gestalt  $V_1 = c a^n$  und das Volumen  $V_2$  in Funktion des  $a$  entsprechenden Elementes  $b$  als  $V_2 = c b^n$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Das gewogene geometrische Mittel ist ein Spezialfall der Klasse der gewogenen Potenzmittel. Beschränken wir uns auf zwei zu mittelnde Grössen  $a > b > 0$ , so können wir diese Mittelwerte in der Gestalt schreiben

$$P = \left(\frac{m a^p + n b^p}{m + n}\right)^{1/p}, \quad \text{(VIII)}$$

wobei  $m$  und  $n$  Gewichte  $\geq 0$  sind. In dieser Mittelwertklasse sind als spezielle Fälle insbesondere alle in der Praxis gebräuchlichen elementaren Mittelwertformeln enthalten («Elemente», Bd. 3. Heft 1, S. 13).

In diesem Zusammenhang mag darauf hingewiesen werden, dass die Funktion  $f(x) = (a + b x)^{1/p}$ ,  $a, b, p$  Konstanten, die Eigenschaft hat, dass

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}(f^p(x_i) + f^p(x_k))\right)^{1/p}, \quad x_i \neq x_k \quad \text{(IX)}$$

das heisst dem arithmetischen Mittel zweier Argumente entspricht das gewöhnliche (ungewogene) Potenzmittel der bezüglichen Funktionswerte. Für  $p = 1$  haben wir

hieraus den bekannten Satz, dass bei der linearen Funktion der Funktionswert des arithmetischen Mittels zweier Argumente gleich dem arithmetischen Mittel der beiden bezüglichen Funktionswerte ist, das heisst

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_k)), \quad x_i \neq x_k. \quad (\text{X})$$

Für  $p = 0$  repräsentiert das Potenzmittel bekanntlich das geometrische Mittel. (Ein Beweis findet sich unter anderem in «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungs-Mathematiker», Band 47, Heft 1, S. 143/144.) Sinngemäss ist hier  $f(x) = a b^x$  zu setzen, und man hat dann

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) = a b^{x_i/2 + x_k/2} = \sqrt{f(x_i) f(x_k)}, \quad x_i \neq x_k, \quad (\text{XI})$$

das heisst dem arithmetischen Mittel zweier Argumente entspricht hier das gewöhnliche geometrische Mittel der beiden bezüglichen Funktionswerte. Man überzeugt sich leicht, dass des weiteren dem arithmetischen Mittel zweier Argumente bei  $p = 2$ , das heisst für  $f(x) = \sqrt{a + b x}$ , das quadratische und bei  $p = -1$ , das heisst für  $f(x) = 1/(a + b x)$ , das harmonische Mittel der beiden bezüglichen Funktionswerte entspricht.

Wenn wir (VIII) für gegebene  $a > b > 0$  und  $p$  als Funktion der Gewichte  $m \geq 0$  und  $n \geq 0$  betrachten, so erhalten wir über dem ersten Quadranten des rechtwinkligen Koordinatensystems interessante Flächengebilde. Schreiben wir für (VIII) vereinfachend  $f(m, n)$ . Als erste wichtige Folgerung ergibt sich

$$f(km, kn) = f(m, n), \quad (\text{XII})$$

das heisst alle Punkte einer von  $(0, 0)$  ausgehenden Geraden sind Fusspunkte gleichen Funktionswertes. Oder mit anderen Worten: jede durch die in  $(0, 0)$  senkrechte Achse gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Geraden, welche zur Spur der Ebene parallel ist. Die Fläche  $f(m, n)$  ist also eine Regelfläche. Die Gesamtheit der Fusspunkte mit  $m = n$  (Winkelhalbierende der  $m$ - und  $n$ -Achsen) repräsentiert als Spur die Niveaugerade des ungewogenen Potenzmittels

$$\left(\frac{1}{2}(a^p + b^p)\right)^{1/p}.$$

Sodann verifiziert man durch einfaches Ausmultiplizieren, dass die Relation gilt

$$\left\{\frac{1}{2}(f^p(m+k, n-k) + f^p(m-k, n+k))\right\}^{1/p} = f(m, n), \quad (\text{XIII})$$

das heisst das gewogene Potenzmittel  $f(m, n)$  ist das gewöhnliche Potenzmittel aus den gewogenen Potenzmitteln  $f(m+k, n-k)$  und  $f(m-k, n+k)$ . Senkrechte Ebenen mit Spurgeraden  $m+n=c=\text{const.}$  schneiden demnach die Fläche in Kurven der Gestalt

$$f(n) = \left(a^p - n \frac{a^p - b^p}{c}\right)^{1/p} = (A + B n)^{1/p},$$

in Übereinstimmung mit (IX). Wenn man also die Spurgeraden von zwei bestimmten Werten  $f_1$  und  $f_2$  einer Potenzmittelformel (VIII) mit einer Geraden schneidet, welche gleiche Achsenabschnitte hat (für welche also  $m+n=c=\text{const.}$ ), dann den Geradenabschnitt halbiert, so charakterisiert die Gerade durch  $(0, 0)$  und den Halbierungspunkt als Spurgerade das ungewogene Potenzmittel  $f$  gleichen Grades aus  $f_1$  und  $f_2$ .



Für die Flächenpunkte gilt die Grössenrelation, immer vorausgesetzt, dass  $a > b > 0$ :

$$f(m + 1, n) > f(m, n) > f(m, n + 1). \tag{XIV}$$

Der Beweis ist einfach; aus der Behauptung

$$\left(\frac{(m + 1) a^p + n b^p}{m + n + 1}\right)^{1/p} > \left(\frac{m a^p + n b^p}{m + n}\right)^{1/p}$$

folgt durch beidseitiges Potenzieren, Erweitern und Ausmultiplizieren  $n a^p > n b^p$  oder  $a > b$  gemäss Voraussetzung. Analog folgt aus

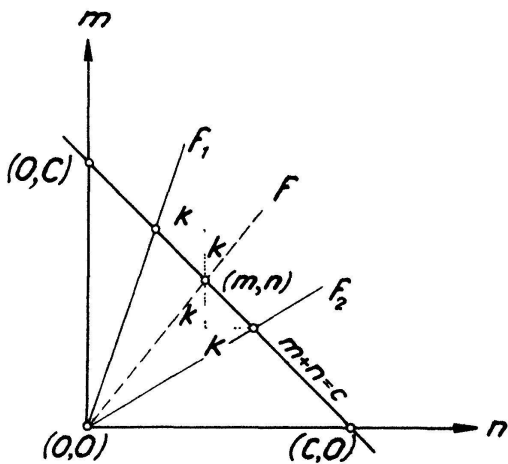
$$\left(\frac{m a^p + n b^p}{m + n}\right)^{1/p} > \left(\frac{m a^p + (n + 1) b^p}{m + n + 1}\right)^{1/p}$$

die Ungleichung  $m a^p > m b^p$  oder  $a > b$ .

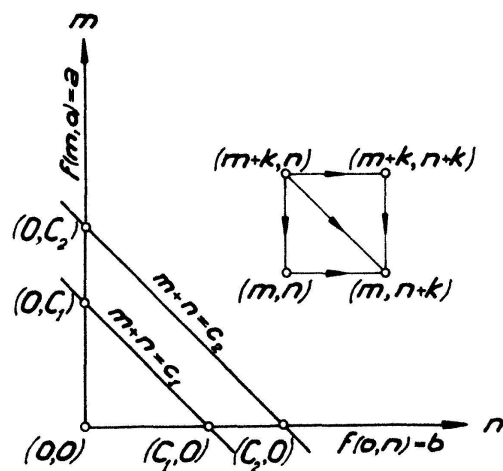
Somit sind die Niveauverhältnisse unserer Fläche für  $m$  und  $n \geq 0$  abgeklärt. Es handelt sich um ein spezielles Wendelflächenstück (aber nicht Schraubenfläche, da es bei Schraubung nicht sich selbst kongruent bleibt). Die Fläche kann erzeugt werden, indem man eine Gerade auf der in  $(0, 0)$  senkrechten Achse und gleichzeitig auf zwei Kurven

$$f_1(n) = \left(a^p - \frac{n}{c_1} (a^p - b^p)\right)^{1/p} \text{ und } f_2(n) = \left(a^p - \frac{n}{c_2} (a^p - b^p)\right)^{1/p}$$

mit den Spurgeraden  $m + n = c_1$  und  $m + n = c_2$  gleiten lässt.



Figur 1



Figur 2

Die Sache wird anschaulich und interessant, wenn man  $p$  einen bestimmten Wert zuteilt. Für  $p = 1$  liefert (VIII) das gewogene arithmetische Mittel.

$$f(m, n) = \frac{m a + n b}{m + n} \tag{XV}$$

der zwei Grössen  $a$  und  $b$ . Hier ist bei gegebenem  $m$  und  $n$

$$f(km, kn) = f(m, n) = \text{const.}$$

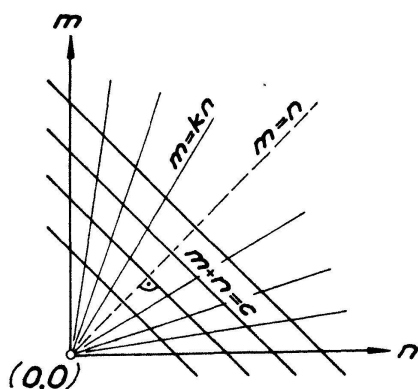
und

$$f(m + k, n - k) - f(m, n) = f(m, n) - f(m - k, n + k) = \text{const.}$$

Die Regelfläche hat also in diesem Falle zwei Geradenscharen. Die Spurgeraden der ersten Schar bilden ein von (0, 0) ausgehendes Strahlenbüschel, und die Spurgeraden der zweiten Schar sind eine Parallelenschar, welche die Winkelhalbierende der  $m$ - und  $n$ -Achsen senkrecht schneiden. Die einzelne Gerade der ersten Schar läuft parallel zur Grundebene, während die Neigung der Geraden der zweiten Schar mit wachsender Entfernung von (0, 0) abnimmt. Die Fläche ist zweiten Grades und wenn man (XV) in der Gestalt schreibt

$$fm + fn - am - bn = 0, \quad a, b \text{ const.}$$

so ersieht man, dass es sich um einen Teil eines hyperbolischen Paraboloids mit unendlich ferner Mitte handelt.



Figur 3

Setzen wir in (VIII) als weiteres Beispiel  $\phi = 0$ , so haben wir das gewogene geometrische Mittel

$$f(m, n) = \sqrt[m+n]{a^m b^n}. \tag{XVI}$$

Man verifiziert leicht, dass (XII) und (XIII) in sinngemässer Anpassung auch hier gelten:

$$f(km, kn) = \sqrt[k(m+n)]{(a^m b^n)^k} = \sqrt[m+n]{a^m b^n} = f(m, n), \tag{XVII}$$

$$\sqrt{f(m+k, n-k) f(m-k, n+k)} =$$

$$= \left( \sqrt[m+n]{a^{m+k} b^{n-k}} \sqrt[m+n]{a^{m-k} b^{n+k}} \right)^{1/2} = \sqrt[m+n]{a^m b^n} = f(m, n). \tag{XVIII}$$

Auch die Größenrelationen (XIV) gelten, denn wenn  $a > b > 0$ , so gilt einerseits

$$(a^m b^n)^{m+n} a^{k(m+n)} > (a^m b^n)^{m+n} a^{km} b^{kn}$$

$$(a^{m+k} b^n)^{m+n} > (a^m b^n)^{m+n+k}$$

$$\sqrt[m+n+k]{a^{m+k} b^n} > \sqrt[m+n]{a^m b^n}$$

und anderseits

$$(a^m b^n)^{m+n} a^{km} b^{kn} > (a^m b^n)^{m+n} b^{k(m+n)}$$

$$(a^m b^n)^{m+n+k} > (a^m b^{n+k})^{m+n}$$

$$\sqrt[m+n]{a^m b^n} > \sqrt[m+n+k]{a^m b^{n+k}}.$$

Die senkrechten Ebenen mit den Geraden des in der Grundebene durch  $(0, 0)$  gehenden Strahlenbüschels schneiden die Fläche in Geraden, deren jede zur Spur parallel ist, die einander parallelen Ebenen mit den Spurgeraden  $m + n = c = \text{const.}$  schneiden die Fläche in Kurven der Art

$$f(n) = a \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^c} = AB^n,$$

also in exponentiellen Kurven. Äquidistante Fusspunkte einer solchen Kurve gehören daher gemäss (XI) zu Funktionswerten mit konstanten Quotienten. H. JECKLIN

## Kleine Mitteilungen

### Ein Problem der konvexen Kurven

S. M. ULAM hat die folgende Aufgabe gestellt (A collection of mathematical problems):

Let  $C$  be a star-shaped closed plane curve i.e. a polar curve given by  $r = r(\varphi)$  and suppose that  $r(\varphi)$  has a continuous derivative except possibly at a finite number of points. It can be shown, that there exists a constant  $a$  such that the curve given by  $\rho = r + a$  is convex.

Er verallgemeinert auch diese Behauptung auf den Fall höherer Dimension.

H. T. CROFT behandelt diese Aufgabe in einer Arbeit: Two problems on convex bodies (Proc. Philos. Soc. Vol. 58, Part 1, Cambridge 1962). Er zeigt, dass obiges Problem in der von ULAM gegebenen Fassung unlösbar ist, und beweist:

Besitzt  $r = r(\varphi)$  eine zweite beschränkte Ableitung  $r''$ , so existiert die behauptete Konstante  $a$ . Ist  $r''$  nicht beschränkt, so gibt es im allgemeinen kein solches  $a$ . Das erste beweist er indirekt: Aus der Voraussetzung, es existiere keine endliche Konstante  $a$  der behaupteten Art, wird nach langer Rechnung ein Widerspruch hergeleitet, falls  $r''$  beschränkt ist. Zweitens gibt er ein Beispiel einer zweimal differenzierbaren Funktion mit unbeschränktem  $r''$ , für welches die Aufgabe keine Lösung besitzt.

Im folgenden wird gezeigt, dass die Aufgabe einfacher gelöst werden kann.

Falls  $r(\varphi)$  zweimal differenzierbar ist, so existiert die Krümmung  $k$  in jedem Punkt der Kurve. Diese ist genau dann konvex, wenn die Krümmung nirgends negativ ist.

Der Ausdruck für  $k$  heisst in Polarkoordinaten:

$$k = \frac{r^2 + 2r'r'' - r r'''}{\sqrt{r^2 + r'^2}^3}.$$

Soll die Kurve  $\rho = r + a$  ( $a = \text{konst.}$ ) konvex sein, so muss für ihre Krümmung:

$$\frac{r^2 + 2ra + a^2 + 2r'r'' - r r''' - a r'''}{\sqrt{(r+a)^2 + r'^2}^3} \geq 0,$$

d. h.

$$a^2 + a(2r - r''') + r^2 + 2r'r'' - r r''' \geq 0$$

gelten. Um hieraus  $a$  zu bestimmen, lösen wir die folgende Gleichung ( $k = 0$ )

$$a^2 + \alpha(2r - r''') + r^2 + 2r'r'' - r r''' = 0.$$

Die Lösung heisst:

$$a = \frac{-2r + r'' \pm \sqrt{r''^2 - 8r'r''}}{2}.$$

Ist diese Grösse überall imaginär, so löst jedes  $a$  unter der Einschränkung  $\text{Min}(r + a) > 0$  die Aufgabe. Nimmt die Wurzel auch reelle Werte an, so ist jedes  $a$  mit

$$a \geq \text{Max} \left[ \sup \frac{-2r + r'' + \sqrt{r''^2 - 8r'r''}}{2}, -\text{Min } r + \varepsilon \right] \quad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}) \quad (\text{I})$$

Lösung, wenn das sup existiert, was der Fall ist, wenn  $r''$  beschränkt ist.