Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 6

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Ist die Funktion $r = r(\varphi)$ nur in einem Intervall kleiner 2π definiert, so gibt es evtl. weitere Lösungen:

$$a \leqq \frac{\inf\left[-2r + r'' - \sqrt{r''^2 - 8r'^2}\right]}{2}.$$

Auch dies befriedigt unsere Aufgabe, wenn nur $\mathrm{Min}(r + a) > 0$ ist. (Ist die Kurve geschlossen, so hat r' eine Nullstelle, weshalb sich die Ungleichungen widersprechen.)

r'' sei nun nicht mehr beschränkt:

Ist $\sup r'' < \infty$, so lässt sich a aus (I) bestimmen, ist $\sup r'' = \infty$, so besitzt die Aufgabe keine Lösung.

M. Wehrli, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 412. Man beweise: Für das ganzwertige Polynom $\binom{x}{n}^2$ vom Grad $2n$ gilt die Darstellung

$$\binom{x}{n}^2 = \binom{n}{0}\binom{n}{0}\binom{x}{n} + \binom{n+1}{1}\binom{n}{1}\binom{x}{n+1} + \binom{n+2}{2}\binom{n}{2}\binom{x}{n+2} + \cdots + \binom{2n}{n}\binom{n}{n}\binom{x}{2n}.$$

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

1. Lösung: Denkt man sich x Dinge $a_1, a_2, \ldots, a_x$ und x Dinge $b_1, b_2, \ldots, b_x$, so ist $\binom{x}{n}^2$ die Anzahl der Kombinationen von je n aus diesem Vorrat genommenen a mit n Dingen b. Es sei C_{n+k} die Anzahl derjenigen unter diesen Kombinationen, in welchen genau $n+k$ verschiedene Indizes auftreten ($k = 0, 1, \ldots, n$). Es gibt $\binom{x}{n+k}$ derartige Indexmengen. In jeder lassen sich die a noch auf $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$ Arten auswählen. Unter den b müssen dann notwendig diejenigen (es sind genau k) auftreten, deren Indizes in der betreffenden Indexmenge von den a nicht benützt wurden, während die $n-k$ übrigen auf $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ Arten ausgewählt werden können. Hieraus folgt

$$C_{n+k} = \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{x}{n+k} \quad \text{und} \quad \binom{x}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}.$$

C. Bindschedler, Küsnacht

2. Lösung: Aus $\binom{n+k}{k}\binom{x}{n+k} = \binom{x}{n}\binom{x-n}{k}$ und der bekannten Identität

$$\binom{u+v}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{u}{k}\binom{v}{r-k}$$

folgt für $u = x - n$ und $v = r = n$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{x}{n+k} = \binom{x}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x-n}{k} = \binom{x}{n}^2.$$

G. Geise, Dresden; O. Reutter, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten L. Carlitz (Durham/USA), H. Meili (Winterthur), I. Paasche (München).

Aufgabe 413. Gegeben ist eine Fläche zweiter Ordnung Φ und zwei in bezug auf sie reziproke[1]) Polaren q, r. Man bestimme alle Flächen mit der Eigenschaft, dass die Tangentialebene in jedem Flächenpunkt P die Geraden q, r in zwei zu P konjugierten Punkten schneidet.

C. Bindschedler, Küsnacht

[1]) In der ursprünglichen Aufgabenstellung stand irrtümlich «konjugierte» Polaren.

Lösung des Aufgabenstellers: Die Erzeugenden der Fläche Φ, welche q und r treffen, bilden ein Vierseit g_1, g_2, g_3, g_4. Für alle Quadriken des Büschels durch diese vier Geraden sind q und r reziproke Polaren. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P in bezug auf die Flächen des Büschels bilden ein Ebenenbüschel, dessen Achse q und r, etwa in Q und R, treffen muss. Denn unter den Flächen des Büschels befinden sich auch die Ebenenpaare $g_1, g_2 \mid g_3, g_4$ und $g_2, g_3 \mid g_4, g_1$. Die Polarebene von P muss im einen Fall durch q, im andern durch r gehen.

Q und R sind konjugiert zu P bezüglich Φ. Für diejenige Quadrik des Büschels, die durch P geht, muss die Tangentialebene in P auch durch Q und R gehen. Die Quadriken des Büschels bilden also gerade die gesuchte Flächenschar.

Aufgabe 414. Jeder Ellipsenschnitt eines Drehzylinders geht bekanntlich bei Verebnung des Zylinders in eine Sinuslinie über. Welchen Winkel muss die schneidende Ebene mit der Zylinderachse einschliessen, damit der Schmiegkegelschnitt in einem Scheitel der verebneten Kurve eine gleichseitige Hyperbel ist? R. BEREIS, Dresden

Lösung: Ist r der Zylinderradius und α der Winkel, den die Schnittebene mit der Zylinderachse einschliesst ($r > 0$, $0 < \alpha \leqq \pi/2$), dann wird die verebnete Schnittkurve bei geeigneter Wahl eines cartesischen Koordinatensystems durch die Gleichung

$$y = f(x) = a \cos(\omega x) \quad \text{mit} \quad a = r \cot\alpha \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{r}$$

dargestellt. Der Schmiegekegelschnitt im Scheitel $(0 \mid a)$ dieser Kurve hat die Gleichung

$$-3 a^2 \omega^2 x^2 + y^2 - 8 a y + 7 a^2 = 0 . \tag{*}$$

Man gewinnt (*) aus dem Ansatz $A x^2 + B y^2 + C x + D y + E = 0$ und aus den Schmiegebedingungen. Diese bestehen aus den Gleichungen $F^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$), wobei

$$F(x) = A x^2 + B f^2(x) + C x + D f(x) + E .$$

Wählt man $B = 1$, so ergibt sich ein eindeutig lösbares System von Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten A, C, D, E mit dem obigen Ergebnis (*). Auf die Darstellung des Rechenganges kann hier wegen seiner Einfachheit verzichtet werden.

Der Schmiegekegelschnitt ist also für $a > 0$, das heisst für $0 < \alpha < \pi/2$, in jedem Fall eine Hyperbel. Insbesondere ergibt sich genau dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn $3 a^2 \omega^2 = 1$ ist, wenn also $\cot^2 \alpha = 1/3$ und damit $\alpha = \pi/3$ ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

Dieselbe Lösung sandte L. KIEFFER (Luxemburg). Weitere Lösungen gingen ein von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), G. GEISE (Dresden), W. JÄNICHEN (Berlin) und H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 415. Show that

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n}{r}^2 \frac{(n-2r)(n-2r-1)\dots(n-2k+1)}{(k-r)!\,(n-2r-1)(n-2r-2)\dots(n-k-r)} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,k!\,(n-2k)!} \quad (2k \leqq n) .$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham N. C., USA

Solution by the Proposer: We shall make use of the familiar formulas

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 (x+1)^r (x-1)^r, \tag{1}$$

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{2r \leqq n} \frac{n!}{r!\,r!\,(n-2r)!} (x^2-1)^r (2x)^{n-2r}, \tag{2}$$

where $P_n(x)$ is the Legendre polynomial of degree n. Also we shall require the identity

$$\left.\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= \sum_{2r \leq n} (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-2r+1)}{r!\,(n-1)(n-2)\dots(n-r)} (\alpha+\beta)^{n-2r} (\alpha\beta)^r \\ &= \sum_{2r \leq n} (-1)^r \frac{n(n-r-1)!}{r!\,(n-2r)!} (\alpha+\beta)^{n-2r} (\alpha\beta)^r \quad (n \geq 1)\,.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

We may rewrite (1) in the form

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{2r \leq n}{}' \binom{n}{r}^2 (x^2-1)^r \left((x+1)^{n-2r} + (x-1)^{n-2r}\right),$$

where the prime indicates that when n is even the last term on the right is

$$\binom{n}{n/2}^2 (x^2-1)^{n/2}\,.$$

Thus, substituting from (3), we get

$$\begin{aligned}P_n(x) &= 2^{-n} \sum_{2r \leq n} \binom{n}{r}^2 (x^2-1)^r \times \\ &\times \sum_{2s \leq n-2r} (-1)^s \frac{1}{s!} \frac{(n-2r)\dots(n-2r-2s+1)}{(n-2r-1)\dots(n-2r-s)} (2x)^{n-2r-2s} (x^2-1)^s = \\ &= 2^{-n} \sum_{2k \leq n} (x^2-1)^k (2x)^{n-2k} \times \\ &\times \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n}{r}^2 \frac{1}{(k-r)!} \frac{(n-2r)\dots(n-2k+1)}{(n-2r-1)\dots(n-k-r)}\,.\end{aligned}$$

Comparing with (2) we immediately get the stated result.

Aufgabe 416. Ein Dreieck habe die Fläche Δ_0. Verbindet man seine Ankreismittelpunkte, so entstehe ein Dreieck mit der Fläche Δ_1'. Wiederholt man dasselbe Verfahren bezüglich des neuen Dreiecks, so habe das entstehende Dreieck die Fläche Δ_2' usw. Es sei das Dreieck mit der Fläche Δ_n homothetisch zu demjenigen mit der Fläche Δ_n' bei einer Charakteristik $1:2^n$. Man weise für das Grenzdreieck $\Delta = \lim_{n\to\infty} \Delta_n$ die Abschätzung

$$\Delta_0 \leq \Delta$$

nach. F. LEUENBERGER, Zuoz

Lösung: Wir verwenden für ein Dreieck und für seine Fläche dieselbe Bezeichnung. Da die Ecken von Δ_0 Höhenfusspunkte von Δ_1' sind, ist der Umkreis von Δ_0 Feuerbachkreis von Δ_1', sein Radius also halb so gross wie der Umkreisradius von Δ_1'. Alle Dreiecke Δ_0, $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots, \Delta$ haben somit gleiche Umkreise. Sind α_n, β_n, γ_n die Winkel von Δ_n, so gilt

$$\alpha_1 = \frac{\beta_0+\gamma_0}{2}\,, \quad \alpha_1 - \beta_1 = \frac{\beta_0-\alpha_0}{2}\,, \quad \alpha_n - \beta_n = (-2)^{-n}(\alpha_0-\beta_0)\,.$$

Hieraus folgt, dass Δ gleichseitig ist und $\Delta_0 \leq \Delta$, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, falls schon Δ_0 gleichseitig ist. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Die Tatsache, dass Δ_n monoton wachsend gegen Δ strebt, ergibt sich nach O. REUTTER auf folgende Weise: Sind α_i $(i = 1, 2, 3)$ die Winkel und R der Umkreisradius von Δ_0, so ist wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

$$\Delta_0 = 0{,}5\,R^2 \sum_{i=1}^{3} \sin 2\alpha_i \leq 0{,}5\,R^2 \sum_{i=1}^{3} \sin \alpha_i = \Delta_1$$

und damit $\Delta_n \leq \Delta_{n+1}$.

Eine weitere Lösung sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

Aufgabe 417. Man beweise die folgende Umkehrung eines bekannten Satzes: Wenn der Schnittpunkt H der Ecktransversalen AA', BB' eines Dreiecks, die dessen Umkreis in A', B' zum zweiten Male treffen, die Eigenschaft hat, dass die Abschnitte $\overline{A'H}$, $\overline{B'H}$ von den Seiten BC resp. AC halbiert werden, und wenn H keine Ecke ist, so ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: AA' schneide BC in P, BB' jedoch AC in Q. Nach dem Sehnensatz gilt $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'}$, woraus die Voraussetzungen $\overline{HP} = 0{,}5\,\overline{HA'}$, $HQ = 0{,}5\,\overline{HB'}$ sofort auf $\overline{HA} \cdot \overline{HP} = \overline{HB} \cdot \overline{HQ}$ führen. $ABPQ$ ist somit ein Sehnenviereck. Mit dem Peripheriewinkelsatz gewinnt man $\sphericalangle QAH = \sphericalangle PBH$, $\sphericalangle QAB' = \sphericalangle PBH$ also $\sphericalangle QAH = \sphericalangle QAB'$. Die Seitenhalbierende AQ im Dreieck HAB' ist somit auch Halbierende des Winkels HAB' und steht also auf HB' senkrecht. Das genügt zum Beweis.

F. LEUENBERGER, Meilen

Weitere Lösungen sandten B. BOLLOBÁS (Budapest), J. BREJCHA (Brno), R. DIESCHBOURG (Luxemburg), H. FRISCHKNECHT (Berneck), W. JÄNICHEN (Berlin), O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 418. Es sei $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha$ und $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Man weise nach, dass für $0 \leqq \xi \leqq 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} \left[\left\{\frac{x^2}{n}\right\} + \left\{\frac{\xi x}{n}\right\}\right] = f(\xi)$$

existiert, und bestimme $\max\limits_{0\leqq\xi\leqq1} f(\xi)$ E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Solution: Clearly

$$\left[\left\{\frac{x^2}{n}\right\} + \left\{\frac{\xi x}{n}\right\}\right] > 0$$

if and only if

$$\left[\frac{x^2 + \xi x}{n}\right] > \left[\frac{x^2}{n}\right] + \left[\frac{\xi x}{n}\right]$$

and in this case we must have

$$\left[\left\{\frac{x^2}{n}\right\} + \left\{\frac{\xi x}{n}\right\}\right] = 1 .$$

It follows that

$$\sum_{n \leqq x} \left[\left\{\frac{x^2}{n}\right\} + \left\{\frac{\xi x}{n}\right\}\right] = \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x^2 + \xi x}{n}\right] - \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x^2}{n}\right] - \sum_{n \leqq x} \left[\frac{\xi x}{n}\right]. \tag{1}$$

Now

$$\sum_{m n \leqq x(x+\xi)} 1 = \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x^2 + \xi x}{n}\right] + \sum_{m \leqq x+\xi} \left[\frac{x^2 + \xi x}{m}\right] - [x]\,[x+\xi] =$$

$$= 2 \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x^2 + \xi x}{n}\right] - \sum_{x < m < x+\xi} \left[\frac{x^2 + \xi x}{m}\right] - [x]\,[x+\xi] .$$

If there is an integer m such that

$$x < m < x + \xi , \tag{2}$$

then

$$m = [x+\xi] = [x] + 1$$

and

$$x < \frac{x^2 + \xi x}{m} < x + \xi , \quad \left[\frac{x^2 + \xi x}{m}\right] = [x + \xi] = m .$$

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{x < m < x+\xi} \left[\frac{x^2 + \xi x}{m}\right] - [x]\,[x+\xi] &= m - m\,(m-1) \\ &= -\,(m-1)^2 + 1 \\ &= -\,[x]^2 + 1 . \end{aligned}$$

If no integer satisfying (2) exists we get

$$\sum_{x<m<x+\xi}\left[\frac{x^2+\xi x}{m}\right]-[x]\,[x+\xi]=-[x^2]\,.$$

It follows that

$$2\sum_{n\leqq x}\left[\frac{x^2+\xi x}{n}\right]=x\,(x+\xi)\log x\,(x+\xi)+(2\,C-1)\,x\,(x+\xi)-[x^2]+o(x)\,, \tag{3}$$

where C is Euler's constant. In particular for $\xi=0$

$$2\sum_{n\leqq x}\left[\frac{x^2}{n}\right]=x^2\log x^2+(2\,C-1)\,x^2-[x^2]+o(x)\,. \tag{4}$$

In the next place

$$\sum_{n\leqq x}\left[\frac{\xi x}{n}\right]=\sum_{n\leqq \xi x}\left[\frac{\xi x}{n}\right]=\xi\,x\log\xi\,x+(2\,C-1)\,\xi\,x+o(x)\,. \tag{5}$$

Then by (1), (3), (4), (5)

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x}\left[\left\{\frac{x^2}{n}\right\}+\left\{\frac{\xi x}{n}\right\}\right]=\frac{1}{2}\,(x+\xi)\log x\,(x+\xi)+\left(C-\frac{1}{2}\right)(x+\xi)-$$
$$-\,x\log x-\left(C-\frac{1}{2}\right)x-\xi\log\xi\,x-(2\,C-1)\,\xi+o(1)=$$
$$=(x+\xi)\log x+\frac{1}{2}\,(x+\xi)\log\left(1+\frac{\xi}{x}\right)-$$
$$-\,x\log x-\xi\log x-\xi\log\xi-\left(C-\frac{1}{2}\right)\xi+o(1)=$$
$$=(1-C)\,\xi-\xi\log\xi+o(1)\,.$$

Therefore

$$f(\xi)=(1-C)\,\xi-\xi\log\xi\qquad(0\leqq\xi\leqq 1)\,.$$

The maximum is at $\xi=e^{-C}$:

$$f(e^{-C})=e^{-C}\,.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham N.C., U.S.A.

Neue Aufgaben

Aufgabe 440. Der Schleife der Strophoide

$$(x^2+y^2)\,x=x^2-y^2$$

ist eine Folge von sich der Reihe nach berührenden Kreisen K_1, K_2, K_3, ... einbeschrieben. K_1 ist Scheitelkrümmungskreis, während jeder andere die Kurve doppelt berührt. Diese Kreise schneiden die x-Achse in den Punkten mit den Abszissen a_1 $(=1)$, a_2, a_3, ... Man zeige, dass die a_i Stammbrüche sind und dass $(3-(-1)^n)/4a_n$ für jedes n das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 441. Man bestimme $\sin\vartheta \neq 1$ in den Vektoren

$$\mathfrak{a}=(0,0,1),\ \mathfrak{b}_k=\left(\cos\vartheta\cos 2\pi\,\frac{k}{5}\,,\ \cos\vartheta\sin 2\pi\,\frac{k}{5}\,,\ \sin\vartheta\right)\quad(k=0,1,\ldots,4)$$

so, dass $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_0=\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_1$ wird. Man zeige, dass unter den Skalarprodukten der 12 Vektoren $\pm\,\mathfrak{a}$, $\pm\,\mathfrak{b}_k$ dann nur die Werte $\pm\,1$, $\pm\,\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_1$ vorkommen. Daraus leite man die Existenz von je 60 geraden und ungeraden Bewegungen her, die diese 12 Vektoren untereinander vertauschen, also die Existenz des regulären Ikosaeders und seiner Gruppe.

H. LENZ, München

Aufgabe 442. Es sei p eine Primzahl der Form $8k+7$. Von den quadratischen Resten mod p werden die absolut kleinsten Reste mod p gebildet. Man beweise, dass ihre Summe Null ergibt.

J. SURÁNYI, Budapest

Aufgabe 443. Unter einem Fermattripel verstehen wir drei der Grösse nach geordnete teilerfremde natürliche Zahlen x, y, z, die einer der Gleichungen $x^n + y^n = z^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ genügen. Man zeige, dass genau ein Fermattripel eine arithmetische Folge erster Ordnung bildet.

E. TROST, Zürich

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Eine Walze und ein symmetrischer Doppeldrehkegel haben dieselbe Höhe h, gleiches Volumen und gleiche Oberfläche. Man bestimme ihre Radien, Oberfläche und Volumen.

▶ $$x = \frac{1+\sqrt{3}}{8}\,h; \quad y = \frac{\sqrt{3}+3}{8}\,h; \quad F = \pi\,\frac{6+5\sqrt{3}}{16}\,h^2; \quad V = \pi\,\frac{2+\sqrt{3}}{32}\,h^3.$$

2. Von zwei konzentrischen, kongruenten gleichseitigen Hyperbeln geht die eine aus der anderen durch eine Drehung um den Winkel α hervor. Unter welchem Winkel schneiden sie sich?

▶ 2α.

3. Gegeben sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2. Die Geraden, die aus den beiden Kreisen gleiche Sehnen schneiden, sind Tangenten an eine Parabel.

▶ Die Potenzlinie der beiden Kreise ist Scheiteltangente, der Mittelpunkt der Strecke M_1M_2 ist Brennpunkt.

4. Gegeben sind zwei Punkte A, B und zwei Geraden p, q. Man bestimme den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Hyperbel durch A und B, deren Asymptoten parallel p und q sind.

▶ Jede Hyperbelsekante durch A und B trägt zwischen Kurve und Asymptoten gleiche Strecken. Zu jeder Wahl dieser Strecken gibt es ein Asymptotenpaar, dessen Schnittpunkt auf einer Gerade durch die Mitte der Sehne AB liegt.

5. Man betrachtet ein Tetraeder $ABCS$ und seine Inkugel. Klappt man die Seitenflächen nach innen in die Ebene ABC um, so liegen die Umklappungen der drei Berührungspunkte im Berührungspunkt der Grundfläche, und dieser Punkt ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks, dessen Ecken die drei Umklappungen von S sind.

▶ Zum zweiten Teil der Behauptung: Die Strecken von S zu den Berührungspunkten sind im Raume gleich, also auch in der Umklappung.

Der Satz lässt sich auf eine beliebige Pyramide ausdehnen: Besitzt eine n-seitige Pyramide eine Inkugel, so liegen die nach innen ausgeführten Umklappungen der Spitze in die Ebene der Grundfläche auf einem Kreis.

Internationaler Mathematikerkongress

Stockholm, 15.–22. August 1962

In der Reihe der alle vier Jahre stattfindenden «grossen» internationalen Mathematikerkongresse wird derjenige von Stockholm als eine besonders glanzvolle Veranstaltung in der Erinnerung der Teilnehmer weiterleben. Schon rein äusserlich stellt die Stockholmer