Sur une propriété des progressions arithmétique

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 4

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22639

bei beliebigen *Schraubflächen*, auf denen sich für gewöhnlich ausgezeichnete Schraublinien (also Gewindekurven) finden lassen, die Schmieglinien der Fläche sind: es sind dies jene Schraublinien, längs welchen der Schraubfläche eine Wendelfläche berührend angeschrieben werden kann. W. WUNDERLICH (Wien)

Sur une propriété des progressions arithmétiques

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME: *s étant un nombre naturel et*

$$a_i + b_i, \quad 2\,a_i + b_i, \quad 3\,a_i + b_i, \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

étant s progressions arithmétiques infinies, ou a_i *et* b_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ *sont des entiers positifs, s'il existe un nombre premier qui appartient à chacune de ces s progressions arithmétiques, il existe une infinité de tels nombres premiers.*

Démonstration: Soit p un nombre premier qui appartient à chacune des progressions arithmétiques (1). Il existe donc pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq s$ un nombre naturel k_i tel que $p = k_i\,a_i + b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Les nombres k_i, a_i et b_i (où $i = 1, 2, \ldots, s$) étant naturels, il en résulte que $p > a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$, donc $(a_i, p) = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$, d'où $(a_1\,a_2 \ldots a_s, p) = 1$ et, d'après le théorème de LEJEUNE DIRICHLET sur la progression arithmétique, il existe une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique

$$a_1\,a_2 \ldots a_s\,k + p\,. \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Soit i un nombre naturel, tel que $i \leq s$. Comme $p = k_i\,a_i + b_i$, on a pour k naturels

$$a_1\,a_2 \ldots a_s\,k + p = a_1\,a_2 \ldots a_s\,k + k_i\,a_i + b_i = a_i\,t + b_i\,,$$

où $t = a_1\,a_2 \ldots a_{i-1}\,a_{i+1} \ldots a_s\,k + k_i$ est un nombre naturel. Cela prouve que tout terme de la progression arithmétique (2) est un terme de chacune des s progressions (1). Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Quant au théorème de LEJEUNE DIRICHLET sur la progression arithmétique, il est à remarquer que j'ai démontré en 1950[1]) qu'il peut être déduit sans peine de la proposition (plus faible) que dans toute progression arithmétique $a\,k + b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, où a et b sont des nombres naturels premiers entre eux, il existe au moins *un* nombre premier. W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Remarque sur les nombres parfaits pairs de la forme $a^n \pm b^n$

M. A. MĄKOWSKI a démontré dans sa note[2]) que 28 est le seul nombre parfait pair de la forme $x^3 + 1$ et qu'il n'existe pas de nombres parfaits pairs de la forme $n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}} + 1$, où le nombre n figure plus que deux fois. Dans la note présente je démontrerai les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Il n'existe aucun nombre parfait pair de la forme* $a^n - b^n$, *où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux et n est un entier* > 2.

---

[1]) Voir mon livre *Teoria Liczb* (en polonais), Monografie Matematyczne t. 19, Warszawa 1950, p. 526.

[2]) A. MĄKOWSKI, *Remark on perfect numbers*, El. Math. *17* (1962), p. 109.