ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVIII Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1963

Seitenrisse konvexer Körper und Homothetie

Es sei $n \geqq 3$. Zwei konvexe Körper[1]) des n-dimensionalen euklidischen Raumes sind nach einem bekannten Satz homothetisch, wenn ihre Normalrisse[2]) auf allen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen homothetisch sind. Ältere bekannte Beweise von W. Süss[3]), S. Matsumura[4]) und anderen beziehen sich auf den Fall des gewöhnlichen Raumes ($n = 3$), doch sind diese leicht auf beliebige Dimensionen zu übertragen. Analoge Aussagen sind auch gültig, wenn man für ein festes i $(2 \leqq i \leqq n-1)$ die Homothetie der Normalrisse auf allen i-dimensionalen Unterräumen voraussetzt. Sie lassen sich auf induktive Weise aber leicht auf den eingangs erwähnten Hauptsatz für $i = n-1$ zurückführen. Für alle diese Sätze, bezogen auf zentralsymmetrische Körper, gab kürzlich H. Groemer[5]) einen kurzen Beweis.

Ziel der vorliegenden Note ist es, zu zeigen, dass die Hauptaussage auch unter schwächeren Voraussetzungen gilt, insbesondere im Falle $n \geqq 4$ dann, wenn die Homothetie der Normalrisse lediglich für die Ebenen eines Büschels mit fester gemeinsamer Geraden gefordert wird. Diese speziellen Normalrisse wollen wir hier Seitenrisse nennen, während der Normalriss auf die zur Büschelgeraden orthogonal stehende Ebene Grundriss heissen soll. Im Falle $n = 3$ ist für die Gültigkeit der Aussage noch zusätzlich die Homothetie der Grundrisse erforderlich.

I. Vorbereitend legen wir einige Bezeichnungen fest.

Eine Raumrichtung werde durch einen Einheitsvektor u gekennzeichnet. Mit E_u und G_u bezeichnen wir die durch den Ursprung O des n-dimensionalen euklidischen Raumes hindurchgehende $(n-1)$-dimensionale Ebene und 1-dimensionale Gerade der Richtung u. Ist A ein konvexer Körper des Raumes, so bedeute A_u bzw. A^u den Normalriss von A auf E_u bzw. G_u. Eine im folgenden stets fest gedachte Richtung w heisse Grundrissrichtung. Die auf w orthogonal stehenden Richtungen u nennen wir Seitenrissrichtungen. Entsprechend sind A_w und A_u Grundriss und Seitenrisse von A. Zwei Körper A und B heissen homothetisch, geschrieben $A \sim B$, wenn sie durch Translation und Dilatation von O aus ineinander übergeführt werden können. Körper, die durch eine Translation in Richtung w ineinander übergehen, sind w-translations-

[1]) Kompakte und konvexe Punktmengen des Raumes.

[2]) Der Normalriss eines Körpers des Raumes auf eine Ebene ist hier die Menge der Punkte in der Ebene, die durch orthogonale Projektion der Punkte des Körpers entstehen. In unserem Falle ist der Normalriss ein $(n-1)$-dimensionaler konvexer Körper.

[3]) Zusammensetzung von Eikörpern und homothetische Eiflächen. Tôhoku, Math. J. *35* (1932), 47–50; insb. 49.

[4]) Eine Kennzeichnung homothetischer Eiflächen. Tôhoku, Math. J. *35* (1932), 285–286.

[5]) Ein Satz über konvexe Körper und deren Projektionen. Portugaliae Math. *21* (1962), 41–43.

gleich, geschrieben $A \stackrel{w}{=} B$. Unter dem Hüllzylinder $H(A, w)$ des konvexen Körpers A in Richtung w verstehen wir den Zylinderkörper mit dem Basiskörper A_w und der Höhenstrecke A^w; er umschliesst A.

II. Nun formulieren wir die nachher zu beweisenden Aussagen. Zunächst gilt der folgende

Satz: *Es sei $n \geqq 4$. Weisen zwei konvexe Körper A und B des n-dimensionalen euklidischen Raumes homothetische Seitenrisse auf, das heisst, gilt $A_u \sim B_u$ für alle auf einer festen Grundrissrichtung w orthogonal stehenden Richtungen u, so gilt $A \sim B$, das heisst, die beiden Körper sind selbst homothetisch.*

Ergänzend formulieren wir weiter zwei Nebenaussagen:

Zusatz a: *Für $n = 3$ ist der Satz falsch.*

Zusatz b: *Ist $n \geqq 3$ und wird zusätzlich vorausgesetzt, dass auch die beiden Grundrisse homothetisch sind, so dass $A_w \sim B_w$ ausfällt, so ist der Satz richtig, das heisst, es gilt jetzt auch in diesem $n = 3$ einschliessenden Fall die Behauptung $A \sim B$.*

Selbstverständlich enthält Zusatz b den in der Einleitung erwähnten klassischen Satz als *Korollar.*

III. Endlich lassen wir die Beweise folgen.

Beweis von Zusatz a: A und B seien gerade zylindrische Körper des gewöhnlichen Raumes mit Höhenrichtung w und übereinstimmender Höhe 1. Basisbereich von A sei ein Reuleauxdreiecksbereich konstanter Breite 1 und derjenige von B ein Kreisbereich vom Durchmesser 1. Alle Seitenrisse A_u und B_u sind translationsgleiche Einheitsquadrate, insbesondere also homothetisch. A und B sind aber nicht homothetisch. Man beachte hier die Existenz inkongruenter Körper mit kongruenten Seitenrissen.

Beweis von Zusatz b: Ohne Einschränkung darf angenommen werden, dass (1) $A_w = B_w$ gilt. Wegen $n \geqq 3$ gibt es eine auf u orthogonal stehende weitere Seitenrissrichtung v. Offensichtlich gelten die Beziehungen $(A_u)^v = (A_w)^v$ und $(B_u)^v = (B_w)^v$, aus welchen mit (1) evidenterweise $(A_u)^v = (B_u)^v$ hervorgeht. Wegen der Voraussetzung $A_u \sim B_u$ und wieder mit (1) folgt (2) $A_u \stackrel{w}{=} B_u$. Weiter gilt $A^w = (A_u)^w$ und $B^w = (B_u)^w$ und im Hinblick auf (2) demnach $A^w \stackrel{w}{=} B^w$. Ohne Einschränkung darf mithin (3) $A^w = B^w$ angenommen werden. Mit (1) und (3) schliesst man, dass A und B übereinstimmende Hüllzylinder haben, sodass $H = H(A, w) = H(B, w)$ gilt. Weiter gilt offensichtlich $H_u = H(A_u, w)$ und $H_u = H(B_u, w)$, sodass auf $H(A_u, w) = H(B_u, w)$ geschlossen werden kann. Die beiden homothetischen Körper A_u und B_u haben identische Hüllzylinder und müssen demnach zusammenfallen, so dass (4) $A_u = B_u$ gilt. Hieraus folgert man mühelos (5) $A = B$. Andernfalls gäbe es etwa einen Punkt $p \in A$ und $p \notin B$. Es existiert dann eine p von B trennende Ebene T der Richtung t. Wegen $n \geqq 3$ gibt es eine auf t orthogonal stehende Seitenrissrichtung s, und man folgert $p_s \in A_s$ und $p_s \notin B_s$, also einen Widerspruch zu (4), wonach ja $A_s = B_s$ sein muss. Mit (5) ist aber die Behauptung $A \sim B$ bewiesen.

Beweis des Satzes: Es sei $n \geqq 4$. Wir gehen von den Bemerkungen $(A_w)_u = (A_u)_w$ und $(B_w)_u = (B_u)_w$ aus und schliessen mit $A_u \sim B_u$ auf $(A_w)_u \sim (B_w)_u$. Die in der Grundrissebene E_w liegenden $(n-1)$-dimensionalen konvexen Körper A_w und B_w haben demnach homothetische Seitenrisse in allen Richtungen u des E_w und sind, im Hinblick auf $n - 1 \geqq 3$, nach Korollar zu Zusatz b selbst homothetisch, so dass also $A_w \sim B_w$ und, nach Zusatz b, $A \sim B$ resultiert.

H. Hadwiger, Bern